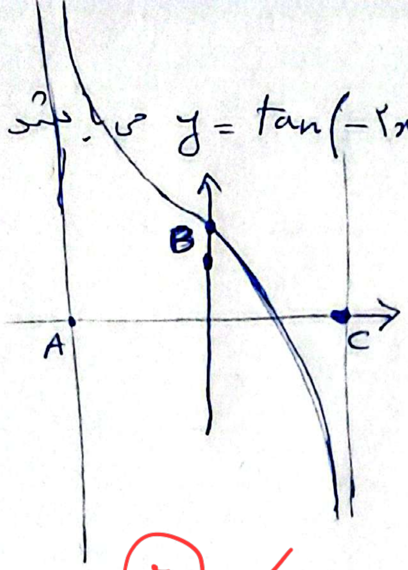
برهام شریعتی



۱- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $y=\tan(-2x+\frac{\pi}{4})$ می‌باشد.

مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲۰

$T=\frac{\pi}{|-2|}=\frac{\pi}{2}$ (CA طول)

$\xrightarrow{x=0} y=\tan(0+\frac{\pi}{4})=1$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{4}$

۲

۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(\sin\alpha)x-\frac{1}{4}\cos^2\alpha=0$

برابر $\frac{2}{3}$ باشد مقدار $1+\tan^2\alpha$ را بیابید.

$x^2-(\sin\alpha)x-\frac{1}{4}\cos^2\alpha=0 \xrightarrow[x=\frac{2}{3}]{} \frac{4}{9}-\frac{2}{3}\sin\alpha-\frac{1}{4}(1-\sin^2\alpha)=0$

$\xrightarrow{\times 36} 9\sin^2\alpha-24\sin\alpha+7=0 \xrightarrow[\text{روش ضربی}]{} \sin^2\alpha-24\sin\alpha+63=0$

$\to(\sin\alpha-21)(\sin\alpha-3)=0 \; \begin{cases}\sin\alpha=\frac{21}{9} \text{ غق} \\ \sin\alpha=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \; *\end{cases}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\to\frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1\to\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$ ★

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\xrightarrow{*} 1+\tan^2\alpha=\frac{9}{8}$

۲

برهام شریعتی

۳- اگر $\log(\sin\alpha)-\log(-\cos\alpha)=\log 3$ برقرار باشد حاصل $\sin\alpha-\cos\alpha$ را بیابید.

$\log\sin\alpha-\log(-\cos\alpha)=\log 3 \longrightarrow \log\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\log 3 \longrightarrow \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=3 \longrightarrow \sin\alpha=-3\cos\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \longrightarrow (-3\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1 \longrightarrow 10\cos^2\alpha=1 \longrightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{10}$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ غ ق ق (چون log را منفی می‌کند) ، $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{10}}$ ✓ و $\sin\alpha=\frac{-3}{-\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}$

۲ ✓

۴- اگر $\sin^4\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{5}$ باشد حاصل $\cos^4\theta+\sin^2\theta$ را بدست آورید.

$\sin^4\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{5} \longrightarrow \sin^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta \to (\sin^2\theta-1)\sin^2\theta+1=\frac{4}{5}$

$-\cos^2\theta\sin^2\theta=-\frac{1}{5}$ *

$\cos^4\theta+\sin^2\theta \to \cos^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta \to \underbrace{(\cos^2\theta-1)}_{-\sin^2\theta}\cos^2\theta+1 \xrightarrow{*} \underbrace{-\sin^2\theta\cos^2\theta}_{-\frac{1}{5}}+1=\frac{4}{5}$

۲ ✓

پرهام شریعتی

۵- اگر $\dfrac{3\sin x+\sin x\cos x}{2-2\cos^2 x}<0$ و $\sin x\tan x-\dfrac{1}{\cos x}>0$ آنگاه انتهای کمان مثلثاتی x کدام ناحیه می‌باشد؟ $(\sin x, \cos x \neq 0)$

$$\sin x\tan x-\frac{1}{\cos x}>0 \longrightarrow \frac{\sin^2 x-1}{\cos x}>0 \xrightarrow{\sin^2 x-1\ \text{همواره منفی}} \cos x<0 \quad \mathrm{I}$$

$$\frac{3\sin x+\sin x\cos x}{2-2\cos^2 x}<0 \longrightarrow \frac{\sin x\overbrace{(3+\cos x)}^{\text{همواره}\ +}}{\underbrace{2\sin^2 x}_{\text{همواره}\ +}}<0 \longrightarrow \sin x<0 \quad \mathrm{II}$$

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II} \Rightarrow$ ناحیه سوم

۳ ✓

۶- اگر $\dfrac{3}{\cos x}+\dfrac{2}{\sin x}=0$ باشد حاصل $\tan x+\cot x$ را بدست آورید. $(\sin x, \cos x \neq 0)$

$$\frac{2}{\sin x}+\frac{3}{\cos x}=0 \longrightarrow \frac{2\cos x+3\sin x}{\sin x\cos x}=0 \longrightarrow 2\cos x+3\sin x=0 \xrightarrow[\div\cos x]{} 2+3\tan x=0$$

$$\longrightarrow \tan x=-\frac{2}{3} \xrightarrow{\cot x=\frac{1}{\tan x}} \cot x=-\frac{3}{2}$$

$$\tan x+\cot x=-\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-4-9}{6}=-\frac{13}{6}$$

۳ ✓

پرهام شریعتی

۷- حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt{1+\sin ۵۰^\circ}}{\sin ۵۰^\circ + \sin ۱۰^\circ}$ را بدست آورید.

$1+\sin ۵۰^\circ = \sin ۹۰^\circ + \sin ۵۰^\circ = ۲\sin\left(\dfrac{۹۰+۵۰}{۲}\right)\cos\left(\dfrac{۹۰-۵۰}{۲}\right) = \underbrace{۲\sin ۷۰^\circ}_{\sin ۲۰}\cos ۲۰ \leftarrow ۲\cos^۲ ۲۰^\circ$

$\sin ۵۰^\circ + \sin ۱۰^\circ = ۲\sin\left(\dfrac{۵۰+۱۰}{۲}\right)\cos\left(\dfrac{۵۰-۱۰}{۲}\right) = ۲\underbrace{\sin ۳۰^\circ}_{\frac{1}{۲}}\cos ۲۰^\circ = \cos ۲۰^\circ$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{۲\cos^۲ ۲۰^\circ}}{\cos ۲۰^\circ} = \dfrac{\sqrt{۲}\,|\cos ۲۰^\circ|}{\cos ۲۰^\circ} \xrightarrow{\cos ۲۰ > ۰} \dfrac{\sqrt{۲}\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} = \sqrt{۲}$

۲ ✓

۸- حاصل عبارت زیر را برحسب کتانژانت مثلثاتی از زاویه‌ی ۱۰ درجه بیابید.

$(1-۲\sin^۲ ۵^\circ)(۲\cos^۲ ۱۰^\circ - 1)\left(\dfrac{1-\tan^۲ ۲۰^\circ}{1+\tan^۲ ۲۰^\circ}\right)$

$1-۲\sin^۲ ۵^\circ = \cos^۲ ۵^\circ - \sin^۲ ۵^\circ = \cos ۱۰^\circ$

$۲\cos^۲ ۱۰ - 1 = \cos^۲ ۱۰ - \sin^۲ ۱۰ = \cos ۲۰^\circ$

$\dfrac{1-\tan^۲ ۲۰^\circ}{1+\tan^۲ ۲۰} = \cos ۴۰^\circ$

$\Rightarrow \cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\sin ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ}} \dfrac{\overbrace{\overbrace{\overbrace{\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ}^{\frac{1}{۲}\sin ۲۰^\circ}\cos ۲۰^\circ}^{\frac{1}{۴}\sin ۴۰^\circ}\cos ۴۰^\circ}^{\frac{1}{۸}\sin ۸۰}}{\sin ۱۰^\circ} = \dfrac{1}{۸} \times \dfrac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ}$

$\sin ۸۰^\circ = \cos ۱۰^\circ$

$\dfrac{1}{۸}\cot ۱۰^\circ$

۲ ✓

پرهام شریعتی

۹- اگر $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 2$ باشد مقدار $5\cos 2\alpha - 12\cos\alpha$ را بدست آورید

$$\sin\alpha + 3\cos\alpha = 2 \longrightarrow \sin\alpha = 2 - 3\cos\alpha \,,\, \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\longrightarrow \cos^2\alpha + (2 - 3\cos\alpha)^2 = 1 \longrightarrow \cos^2\alpha + 4 + 9\cos^2\alpha - 12\cos\alpha = 1$$

$$\longrightarrow 10\cos^2\alpha - 12\cos\alpha = -3$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \longrightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \xrightarrow{\times 5} 5\cos 2\alpha = 10\cos^2\alpha - 5$$

$$\underbrace{10\cos^2\alpha - 12\cos\alpha}_{-3} - 5 = -3 - 5 = -8$$

۲

۱۰- در مثلث ABC اگر $\sin\hat{B}\sin\hat{C} = \cos^2\frac{\hat{A}}{2}$ و $\hat{B} = 72^\circ$ باشد زاویه $\hat{A}$ را بدست آورید

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \longrightarrow \sin B \sin C = \frac{1}{2}(\cos(B-C) - \cos(B+C))$$

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \longrightarrow \cos\frac{A}{2} \times \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\cos A + \underbrace{\cos 0}_{1})$$

$$A + B + C = 180 \longrightarrow B + C = 180 - A$$

$$B = 180 - C - A \Longrightarrow \frac{1}{2}(\cos(180 - (2C + A)) - \cos(180 - A))$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}(-\cos 2C + A + \cos A) = \frac{1}{2}\cos A + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2C + A + \frac{1}{2}\cos A$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{2}\cos 2C + A = \frac{1}{2} \longrightarrow \cos 2C + A = -1 \longrightarrow 2C + A = 180$$

$$C = B = 72 \longrightarrow A = 180 - (2 \times 72) = 36^\circ$$

۲