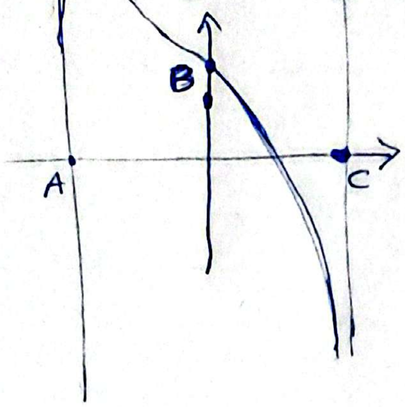
برهام شریعتی

۱- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $y=\tan(-2x+\frac{\pi}{4})$ می‌باشد. مساحت مثلث ABC را بدست آورید.



$T=\frac{\pi}{|-2|}=\frac{\pi}{2}$ (CA طول)

$\xrightarrow{x=0} y=\tan(0+\frac{\pi}{4})=1$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{4}$

۲- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(\sin\alpha)x-\frac{1}{4}\cos^2\alpha=0$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد مقدار $1+\tan^2\alpha$ را بیابید.

$x^2-(\sin\alpha)x-\frac{1}{4}\cos^2\alpha=0 \xrightarrow[x=\frac{2}{3}]{} \frac{4}{9}-\frac{2}{3}\sin\alpha-\frac{1}{4}(1-\sin^2\alpha)=0$

$\xrightarrow{\times 36} 9\sin^2\alpha-24\sin\alpha+7=0 \xrightarrow[\text{روش ضربی}]{} \sin^2\alpha-24\sin\alpha+63=0$

$\longrightarrow (\sin\alpha-21)(\sin\alpha-3)=0$

$\sin\alpha=\frac{21}{9}$ غ‌ق

$\sin\alpha=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ *

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \longrightarrow \frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1 \longrightarrow \cos^2\alpha=\frac{8}{9}$ ☆

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \xrightarrow{☆} 1+\tan^2\alpha=\frac{9}{8}$

برهام شریعی

۳- اگر $\log(\sin\alpha)-\log(-\cos\alpha)=\log 3$ برقرار باشد حاصل $\sin\alpha-\cos\alpha$ را بیابید.

$$\log\sin\alpha-\log -\cos\alpha=\log 3\longrightarrow \log\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\log 3\longrightarrow \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=3\longrightarrow \sin\alpha=-3\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\longrightarrow(-3\cos\alpha)^2+\cos\alpha=1\longrightarrow 10\cos^2\alpha=1\longrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$$

$\cos\alpha=$ $\frac{1}{\sqrt{10}}$ غ ق ق (چون log را منفی می‌کند) ، $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ ✓ و $\sin\alpha=\frac{-3}{-\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}$$

۴- اگر $\sin^4\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{5}$ باشد حاصل $\cos^4\theta+\sin^2\theta$ را بدست آورید.

$$\sin^4\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{5}\longrightarrow\sin^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta\rightarrow(\sin^2\theta-1)\sin^2\theta+1=\frac{4}{5}$$

$$-\cos^2\theta\sin^2\theta=-\frac{1}{5}\ *$$

$$\cos^4\theta+\sin^2\theta\rightarrow\cos^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\rightarrow\underbrace{(\cos^2\theta-1)}_{-\sin^2\theta}\cos^2\theta+1\xrightarrow{*}\underbrace{-\sin^2\theta\cos^2\theta}_{-\frac{1}{5}}+1=\frac{4}{5}$$

پرهام شریعتی

۵- اگر $\frac{3\sin x+\sin x\cos x}{2-2\cos^2 x}<0$ و $\sin x\tan x-\frac{1}{\cos x}>0$ آنگاه انتهای کمان مثلثاتی x کدام ناحیه می‌باشد؟ $(\sin x,\cos x\neq 0)$

$$\sin x\tan x-\frac{1}{\cos x}>0 \longrightarrow \frac{\sin^2 x-1}{\cos x}>0 \xrightarrow{\sin^2 x-1\ \text{همواره منفی}} \cos x<0 \quad \mathrm{I}$$

$$\frac{3\sin x+\sin x\cos x}{2-2\cos^2 x}<0 \longrightarrow \frac{\sin x(\overbrace{3+\cos x}^{\text{همواره}\ +})}{\underbrace{2\sin^2 x}_{\text{همواره}\ +}}<0 \longrightarrow \sin x<0 \quad \mathrm{II}$$

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II} \Rightarrow$ ناحیه سوم

۶- اگر $\frac{2}{\sin x}+\frac{3}{\cos x}=0$ باشد حاصل $\tan x+\cot x$ را بدست آورید. $(\sin x,\cos x\neq 0)$

$$\frac{2}{\sin x}+\frac{3}{\cos x}=0 \longrightarrow \frac{2\cos x+3\sin x}{\sin x\cos x}=0 \longrightarrow 2\cos x+3\sin x=0 \xrightarrow[\div\cos x]{} 2+3\tan x=0$$

$$\longrightarrow \tan x=-\frac{2}{3} \xrightarrow{\cot x=\frac{1}{\tan x}} \cot x=-\frac{3}{2}$$

$$\tan x+\cot x=-\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-4-9}{6}=-\frac{13}{6}$$

پرهام شریعتی

۷- حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt{1+\sin 50^\circ}}{\sin 50^\circ+\sin 10^\circ}$ را بدست آورید.

$$1+\sin 50^\circ = \sin 90^\circ+\sin 50^\circ = 2\sin\left(\frac{90+50}{2}\right)\cos\left(\frac{90-50}{2}\right) = \overbrace{2\underbrace{\sin 70^\circ}_{\sin 20}\cos 20}^{2\cos^2 20^\circ}$$

$$\sin 50^\circ+\sin 10^\circ = 2\sin\left(\frac{50+10}{2}\right)\cos\left(\frac{50-10}{2}\right) = 2\underbrace{\cancel{\sin 30^\circ}}_{\frac{1}{2}}\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2\cos^2 20^\circ}}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2}\,|\cos 20^\circ|}{\cos 20^\circ} \xrightarrow{\cos 20>0} \frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{2}$$

۸- حاصل عبارت زیر را برحسب کتان مثلثاتی از زاویه‌ی ۱۰ درجه بیابید.

$$(1-2\sin^2 5^\circ)(2\cos^2 10^\circ-1)\left(\frac{1-\tan^2 20^\circ}{1+\tan^2 20^\circ}\right)$$

$$1-2\sin^2 5^\circ = \cos^2 5^\circ-\sin^2 5^\circ = \cos 10^\circ$$

$$2\cos^2 10-1 = \cos^2 10-\sin^2 10 = \cos 20^\circ$$

$$\frac{1-\tan^2 20^\circ}{1+\tan^2 20} = \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ \xrightarrow{\times\frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}} \frac{\overbrace{\overbrace{\overbrace{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}^{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}\cos 20^\circ}^{\frac{1}{4}\sin 40^\circ}\cos 40^\circ}^{\frac{1}{8}\sin 80}}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{8}\times\frac{\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$\frac{1}{8}\cot 10^\circ \xleftarrow{\sin 80^\circ = \cos 10^\circ}$$

پرهام شریعتی

۹- اگر $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 2$ باشد مقدار $5\cos 2\alpha - 12\cos\alpha$ را بدست آورید

$$\sin\alpha + 3\cos\alpha = 2 \longrightarrow \sin\alpha = 2 - 3\cos\alpha \,,\; \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\longrightarrow \cos^2\alpha + (2 - 3\cos\alpha)^2 = 1 \longrightarrow \cos^2\alpha + 4 + 9\cos^2\alpha - 12\cos\alpha = 1$$

$$\longrightarrow 10\cos^2\alpha - 12\cos\alpha = -3$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \longrightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \xrightarrow{\times 5} 5\cos 2\alpha = 10\cos^2\alpha - 5$$

$$\underbrace{10\cos^2\alpha - 12\cos\alpha}_{-3} - 5 = -3 - 5 = -8$$

۱۰- در مثلث ABC اگر $\sin\hat{B}\sin\hat{C} = \cos^2\frac{\hat{A}}{2}$ و $\hat{B} = 72^\circ$ باشد زاویه $\hat{A}$ را بدست آورید

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \longrightarrow \sin B \sin C = \tfrac{1}{2}(\cos(B-C) - \cos(B+C))$$

$$\cos a \times \cos b = \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \longrightarrow \cos\tfrac{A}{2} \times \cos\tfrac{A}{2} = \tfrac{1}{2}(\cos A + \underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1})$$

$$A + B + C = 180 \longrightarrow B + C = 180 - A$$

$$B = 180 - C - A \Longrightarrow \tfrac{1}{2}(\cos(180 - (2C + A)) - \cos(180 - A))$$

$$\longrightarrow \tfrac{1}{2}(-\cos 2C + A + \cos A) = \tfrac{1}{2}\cos A + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}\cos 2C + A + \tfrac{1}{2}\cos A$$

$$\longrightarrow -\tfrac{1}{2}\cos 2C + A = \tfrac{1}{2} \longrightarrow \cos 2C + A = -1 \longrightarrow 2C + A = 180$$

$$C = B = 72 \longrightarrow A = 180 - (2 \times 72) = 36^\circ$$