

(۱) قاعده مثلث ABC برابر دور و تقاد = مقدار است و ارتفاع آن برابر عرض از عمود می باشد پس داریم:

$$x=0 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = h \Rightarrow AC = T = \frac{\pi}{1-1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\frac{\pi}{2} \times 1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

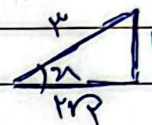
(۲) ✓

(۲) $\frac{2}{3}$ را در معادله مذکور جایگذاری می کنیم.

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \sin x = \frac{1}{9} \cos^2 x = 0 \xrightarrow{\times 9} 4 \cos^2 x + 24 \sin x - 14 = 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 x - 24 \sin x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{11}{9} = \frac{4}{3} \text{ غلط} \\ \sin x = \frac{4}{9} = \frac{1}{3} \checkmark \end{cases}$$

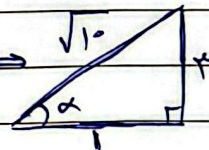


(۲) ✓

$$\Rightarrow |\cos x| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{9}{4}$$

(۳) طبق فرض توابع $\sin$ و $\cos$ در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ داریم $\sin x > 0$ و $\cos x < 0$ پس x باید در ناحیه دوم قرار گیرد.

$$\log \frac{\sin x}{-\cos x} = \log(-\tan x) = \log 3 \Rightarrow \tan x = -3 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10}$$

(۲) ✓

$$\sin^2 \theta + 1 - \sin^2 \theta = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin^2 \theta - \sin^2 \theta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right) = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta (-\cos^2 \theta) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 1) + 1 = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

(۲) ✓

حالت کلی

$$\frac{\sin x (3 + \cos x)}{2 \sin x \sin x} \xrightarrow{\sin x \neq 0} \frac{3 + \cos x}{2 \sin x} < 0$$

(۵) در عبارت اول داریم:

صورت یک همدار مثبت می باشد در نتیجه باید مخرج کسر منفی باشد پس

$$\sin x < 0 \quad \text{یعنی سوم یا چهارم}$$

$$\sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} > 0$$

در عبارت دوم داریم:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x} > 0$$

از آنجا که جفت دارد ۲ صورت بدست می آید

منفی نوشته می شود پس $\cos x < 0$ منفی هم داریم از آنجا نیز

منفی نوشته می شود یا $+1$ یا -1 بدونه در نتیجه حاصل صورت کسر مقابل همدار منفی می باشد و برای مثبت بودن کل

کسر لازم است مخرج نیز منفی باشد پس $\cos x < 0$ در ناحیه دوم یا سوم قرار دارد $\Rightarrow \cos x < 0$

از اشتراک دو نامبردار فوق می فهمیم که انتهای کمان مثلثاتی x در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد

$$\frac{2 \cos x + 3 \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow 2 \cos x + 3 \sin x = 0 \Rightarrow 2 \cos x = -3 \sin x \quad (9)$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-2}{3} \Rightarrow \arctan \frac{-2}{3} \Rightarrow \frac{-2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{-13}{4}$$

$$\sqrt{1 + \sin 40} = \sqrt{1 + \cos 80}$$

(۷) اعتبار سیاه صریح کسری داریم:

$$\Rightarrow \frac{1 + \cos 80}{2} = \cos^2 40 \Rightarrow 1 + \cos 80 = 2 \cos^2 40 \Rightarrow \sqrt{1 + \cos 80} = 2 \cos 40 \times \sqrt{2}$$

$$\sin 40 + \sin 10 = \sin(30 + 10) + \sin(30 - 10)$$

استدلال صحیح کردیم:

$$\sin 30 \cos 10 + \sin 10 \cos 30 + \sin 30 \cos 10 - \sin 10 \cos 30 = 2 \sin 30 \cos 10 = \cos 10$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 10 \times \sqrt{2}}{\cos 10} = \sqrt{2} \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$(1 - 2 \sin^2 40)(2 \cos^2 10 - 1) \left(\frac{1 - \tan^2 10}{1 + \tan^2 10} \right) = (\cos 10)(\cos 20)(\cos 40) = A \quad (۸)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 10}{\sin 10} \times \cos 10 \times \cos 20 \times \cos 40 = \frac{1}{8} \sin 10 \times \frac{1}{\sin 10} = \frac{1}{8} \cos 10 = \frac{1}{8} \arctan 10$$

(۲) $\checkmark$

$$\sin \alpha + 3 \cos \alpha = 2 \Rightarrow \sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha$$

(9)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 4 - 12 \cos \alpha + 9 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow 10 \cos^2 \alpha - 12 \cos \alpha = -3$$

$$\Rightarrow 5 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 1 = 0 \Rightarrow (5 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 1) = 0$$

اکنون به خواسته سوال مراجعه می کنیم

$$\Rightarrow \underbrace{10 \cos^2 \alpha - 12 \cos \alpha - 3}_{-3} = -3 \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = 1}$$

(2) ✓

$$\hat{A} + \hat{C} = 101^\circ \Rightarrow \hat{C} = 101^\circ - \hat{A}$$

(10)

$$\sin \hat{B} \cos \hat{C} = \frac{1}{4} (\cos(\hat{B} - \hat{C}) - \cos(\hat{B} + \hat{C})) \quad \text{--- } \cos A$$

$$\Rightarrow \sin \hat{B} \sin(101^\circ - \hat{A}) = \frac{1}{4} (\cos(A - 34^\circ) - \cos(110^\circ - A))$$

$$\Rightarrow \sin \hat{B} \sin(101^\circ - \hat{A}) = \frac{1}{4} (\cos(\hat{A} - 34^\circ) + \cos \hat{A})$$

$$\frac{\cos \hat{A}}{4} = \frac{\cos \hat{A} + 1}{4} \Rightarrow \cos \hat{A} + 1 = \cos(\hat{A} - 34^\circ) + \cos \hat{A} \Rightarrow \cos(\hat{A} - 34^\circ) = 1$$

$$\Rightarrow \hat{A} - 34^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 34^\circ}$$

(2) ✓