برهام شریعتی

17,5

۱ـ جواب کلی معادلات مثلثاتی زیر را بدست آورید.

(الف $\cos 2x = 3\sin x - 1$

(ب $\cos 2x + \cos x - 2 = 0$

الف) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 3\sin x - 1 \longrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\xrightarrow{\text{روش}} \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x + 2)(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$ — $\sin x = \frac{-4}{2} = -2$ غ ق ق ; $\sin x = \frac{1}{2}$ ق ق

2

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$; $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

ب) $\cos 2x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} + \cos x - 2 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

$\xrightarrow{\text{روش}} \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow (\cos x + \frac{3}{2})(\cos x - 1) = 0$ — $\cos x = \frac{-3}{2}$ غ ق ق ; $\cos x = 1$ ق ق

$\cos x = 1 = \cos 0 \longrightarrow x = 2k\pi \pm 0 = 2k\pi$

۲ـ جواب کلی معادلات مثلثاتی زیر را بدست آورید.

(الف $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$

(ب $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$

الف) $\underbrace{\sin^4 x - \cos^4 x}_{\cancel{(\sin^2 x + \cos^2 x)}(\sin^2 x - \cos^2 x)} = \underbrace{\sin 4x}_{2\sin 2x \cos 2x} \longrightarrow -\cos 2x = 2\sin 2x \cos 2x$

$(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})(\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x})$; $2\sin 2x \cos 2x$

$\longrightarrow -\frac{1}{2} = \sin 2x = \sin(\frac{-\pi}{6}) \longrightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}$; $2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$, $x = k\pi + \frac{7\pi}{12}$

$\longrightarrow \cos 2x = 0 \longrightarrow 2x = \cancel{2k\pi \pm 0 \rightarrow x = k\pi}$

$k\pi + \frac{\pi}{2}$

1,5

ب) $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \longrightarrow \sin 2x = 1 - 2\cos^2 x \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$

$\sin 2x = \cos(\pi - 2x) \longrightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - (\pi - 2x)) \longrightarrow \sin 2x = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

$\longrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + 2x \longrightarrow$ غ ق ق

$\longrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - 2x \rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$

$\cos 2x + \sin 2x = 0$

$1 + \tan 2x = 0 \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

پرهام شریعتی

۳- جواب کلی معادلات مثلثاتی زیر را بدست آورید:

الف) $\cot x\,(2\cos x+1)=\frac{1}{\sin x}$

ب) $2\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x=3$

الف) $\cot x(2\cos x+1)=\frac{1}{\sin x}\to\frac{\cos x}{\sin x}(2\cos x+1)=\frac{1}{\sin x}$

۲

$\to\begin{cases}\sin x\neq 0\\ 2\cos^2 x+\cos x-1=0\to\cos^2 x+\cos x-2=0\to(\cos x+2)(\cos x-1)=0\end{cases}$

$\to\cos x=-\frac{2}{2}=-1=\cos\pi\to x=2k\pi+\pi$ غ ق ق

چون sinx را صفر می‌کند

$\to\cos x=\frac{1}{2}=\cos(\frac{\pi}{3})\to x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

ب) $2\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x=2\xrightarrow[\div\sin^2 x]{}2-\cot x+\cot^2 x=2(1+\cot^2)$

$\cot^2 x+\cot x=0\to\cot x(1+\cot x)=0$

$\cot x=0=\cot\frac{\pi}{2}\to x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\cot x=-1=\cot(-\frac{\pi}{4})\to x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

۴- جواب کلی معادلات مثلثاتی زیر را بدست آورید:

الف) $\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$

ب) $\cos(2x-\frac{\pi}{9})=-\sin 2x$

1,5

الف) $\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}\to\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}+x))\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{4}$

$\to\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{4}\to\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{1}{4}\to\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{1}{2}=\sin(\frac{\pi}{6})$

$\frac{\pi}{2}-2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\to x=-k\pi+\frac{\pi}{6}$ $\sin(\frac{\pi}{2}+2x)=\frac{1}{2}\to\cos 2x=\frac{1}{2}\to x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2}-2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\to x=-k\pi-\frac{\pi}{6}$

ب) $\cos(2x-\frac{\pi}{9})=-\sin 2x\to\cos(2x-\frac{\pi}{9})=\sin(-2x)\to\cos(2x-\frac{\pi}{9})=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$

$\to 2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+2x)$

$\cancel{2x}-\frac{\pi}{9}=2k\pi+\cancel{2x}+\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{9}\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ غ ق ق

$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi-2x-\frac{\pi}{2}\to 4x=2k\pi-\frac{7\pi}{18}$

$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}$

برهام شریعتی

۵ - مجموعه جواب معادله مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 2x} - \sin^2 x = \cos^2 x$$

۲

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 2x} - \sin^2 x = \cos^2 x \longrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x} + 1 = \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}$$

$$\longrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 = \sin(0) \longrightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 0 \longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi + \pi - 0 \longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \\ \sin 2x \neq 0 \neq \sin(0) \longrightarrow \begin{cases} 2x \neq 2k\pi + 0 \longrightarrow x \neq k\pi \\ 2x \neq 2k\pi + \pi - 0 \longrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \underline{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

۶ - قدر مطلق تفاضل جواب های معادله مثلثاتی زیر در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ را بدست آورید.

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cot \frac{x}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \longrightarrow \frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \longrightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\longrightarrow 1 - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} + 1 \longrightarrow 2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} = 0 \longrightarrow 2\cos \frac{x}{2}\left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = 4k\pi \pm \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ 1 + \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{غ ق ق} \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \neq \sin(0) \longrightarrow \frac{x}{2} \neq 2k\pi + 0 \longrightarrow x \neq 4k\pi \longrightarrow x \neq 2k\pi \\ \qquad \longrightarrow \frac{x}{2} \neq 2k\pi + \pi - 0 \longrightarrow x \neq 4k\pi + 2\pi \longrightarrow x \neq 2k\pi \end{cases}$$

فرض را نقض می‌کند

~~$x = 2k\pi$~~

۲

جوابها در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ $\Rightarrow x = -\pi, \pi \longrightarrow |-\pi - \pi| = 2\pi$

$K = -1 \longrightarrow x = -\pi$

$K = 0 \longrightarrow x = \pi$

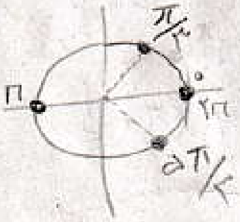
برهام شریعتی

۷ _ تعداد جواب های معادله مثلثاتی زیر در فاصله $[0, 2\pi]$ را بیابید:

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \rightarrow -\sin^2 x \cos 3x = 1 - \cos^2 x$$

$$\rightarrow -\sin^2 x \cos 3x = \sin^2 x \rightarrow \begin{cases} \cos 3x = -1 = \cos\pi \rightarrow 3x = 2k\pi \pm \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} \\ \sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0 = \sin(0) \rightarrow x = 2k\pi + 0 \\ \qquad x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$



۵ جواب

$k = 0 \longrightarrow x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{3}$

$x = \pi \qquad x = -\frac{\pi}{3}$ غ ق ق

۲

$k = 1 \rightarrow x = 2\pi \qquad x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

$x = 3\pi$ غ ق ق $\qquad x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$k = 2 \longrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$

۸ _ جواب کلی معادله مثلثاتی زیر را بیابید:

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \longrightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \longrightarrow x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \cos 3x \neq 0 \longrightarrow 3x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} \\ 1 + \tan x \neq 0 \longrightarrow \tan x \neq -1 \neq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow x \neq k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \rightarrow \frac{\pi}{4} - x = k\pi + 3x \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

پرهام شریعتی

۹ـ معادله مثلثاتی در بازه [۰,π] چند جواب دارد؟

$$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x$$

۲ جواب $\frac{1}{2}$

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \cancel{\frac{17\pi}{12}}$

$$\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x} = \sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$|\sin x+\cos x| = \sqrt{2}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

$x=\frac{3\pi}{4}$ 1.5 $k=0$

$\sin x+\cos x=0 \xrightarrow[\div \cos x]{} \tan x+1=0 \to \tan x=-1=\tan\frac{3\pi}{4} \to x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$

$\sin x+\cos x>0 \Rightarrow \cos x-\sin x=\frac{\sqrt2}{2} \to -\sqrt2\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2}{2} \to \sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac12 = \sin -\frac{\pi}{6}$

$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{6} \to x=2k\pi+\frac{\pi}{12}$ ($x=\frac{\pi}{12} \leftarrow k=0$) / $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6} \to x=2k\pi+\frac{17\pi}{12}$ خارج بازه [۰,π]

$\sin x+\cos x<0 \Rightarrow \cos x-\sin x=-\frac{\sqrt2}{2}\to -\sqrt2\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt2}{2}\to\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac12=\sin\frac{\pi}{6}$

$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \to x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$ ($k=0 \to x=\frac{5\pi}{12}$) / $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\to x=2k\pi+\frac{13\pi}{12}$ خارج بازه [۰,π]

۱۰ـ جواب های معادلات مثلثاتی زیر را در بازه [۰,۲π] بدست آورید:

الف) $\sin^4 x-\cos^4 x=1$

ب) $\sin^3 x-\cos^3 x=-1$

۲

الف) $\sin^4x-\cos^4x=1 \to \underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}\underbrace{(\sin^2x-\cos^2x)}_{-\cos 2x}=1\to-\cos 2x=1$

$\to\cos 2x=-1=\cos\pi\to 2x=2k\pi\pm\pi\to x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ در بازه [۰,۲π] $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ب) $\sin^3x-\cos^3x=-1$

* در معادلات به فرم $\pm\sin^n x\pm\cos^n x=\pm1$ برای تعیین جواب های معادله نقاط مرزی را مورد بررسی قرار می دهیم

$\to x=0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

در بازه [۰,۲π]