

$$1 - \cos x - \tan^2 x = 1$$

۱- تعداد جواب های معادله مثلثاتی
در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید:

$$1 - \cos x - \tan^2 x = 1 \rightarrow 1 - \cos x = 1 + \tan^2 x \rightarrow 1 - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 - \cos^2 x = 1$$

$$\rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{جوابها: } \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

✓ (۲)

۲- تعداد جواب های معادله مثلثاتی
در بازه $[-\pi, \pi]$ را بیابید. ص. طبق

$$2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + 2(1 + \cos^2 x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 0$$

$$2 \sin^2 x = 0 \rightarrow \sin^2 x = 0 \rightarrow x = k\pi = -\pi, 0, \pi$$

جمع ۲ عبارت نامشابه و مساوی ۰ است

$$4 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0 \rightarrow \cos^2 \frac{3x}{2} = 0 \rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$$

✓ (۴)

ریشه های معادله $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$ اند و ۴ جواب دارد

پرهام شریعی

۳- مجموع جواب‌های معادله $2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

$$2 \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 1 \rightarrow 2 \sin x - 4 \sin^3 x = 1 \rightarrow \sin^3 x = 1$$

$$\rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$$

مجموع سه ریشه $\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{4}$

✓

۴- اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi + 2x}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi + 2x}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan 2\alpha$ را بیابید.

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} + 2x)} = 0 \rightarrow \frac{-\sin 2x + \cos 2x}{(\cos 2x)(-\sin 2x)} = 0 \rightarrow \sin 2x = \cos 2x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x \rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{8} \\ x_2 = \frac{3\pi}{8} \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(2\alpha) = \tan\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \tan(\pi) = 0$$

✓

$$5 - \text{در معادله ی فوقانی} \quad m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{4} \sin 2x = \sqrt{4}$$

اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، مقدار m را بیابید.

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{4}}{3} \Rightarrow \underbrace{(\cos x - \sin x)^2}_{\frac{4}{9}} = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}_1$$

$$\rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{4} \sin 2x = \sqrt{4} \Rightarrow \frac{m\sqrt{4}}{3} - 3\sqrt{4}(\frac{1}{9}) = \sqrt{4}$$

$$\frac{m\sqrt{4}}{3} - \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow \frac{m\sqrt{4}}{3} = 2\sqrt{4} \rightarrow m = 6$$

۲ ✓

6 - تعداد جواب های معادله ی

در بازه $[0, 2\pi]$ ، $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ را بیابید.

$$\rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \rightarrow \cos(\frac{\pi}{4} - (x + \frac{\pi}{4})) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\rightarrow \cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \xrightarrow{\cos(x) = \cos(-x)} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \pm 1$$

$$\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

جوابها در بازه $[0, 2\pi]$ $x = \frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

در این بازه معادله ۲ جواب دارد.

۲ ✓

برهان شریعی

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{4}$$

۷- مجموع جواب های معادله ی متناوب

در بازه $[-\pi, \pi]$ ایجاب می کند:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(x+\alpha) = a \sin x + b \cos x$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\rightarrow 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{4} \rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4})$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$$

$$\frac{17\pi}{12} \leftarrow \text{مجموع}$$

✓

$$2 \sin x \sin(\frac{5\pi}{12} - x) = 1$$

۸- مجموع جواب های معادله ی متناوب

در بازه $[0, 2\pi]$ ایجاب می کند:

$$2 \sin x \sin(\frac{5\pi}{12} - x) = 1 \rightarrow -2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow -2(\frac{1}{2} \sin 2x) = 1$$

$$-2 \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

✓

$$x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \leftarrow \text{مجموع}$$

$$\frac{40\pi}{12} = 10\pi$$

برهان شریعی

۹- فرض کنید A مجموع جواب معادله مثلثی زیر در بازه $[0, 2\pi]$

باشد، ما کسینم و سینوس مجموع A را بیابید:

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 2\cos^2 \alpha \cdot 2\cos^2 2\alpha \cdot 2\cos^2 4\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{4\sqrt{2}} \rightarrow \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\times \frac{\sin \alpha}{\alpha \neq k\pi} \rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{8\sqrt{2}} \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}} \sin 8\alpha = \pm \frac{1}{8\sqrt{2}} \sin \alpha \rightarrow \sin 8\alpha = \pm \sin \alpha$$

$$\textcircled{1} \sin 8\alpha = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \rightarrow \max = \frac{4\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \rightarrow \max = \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

$\frac{\alpha = \pi}{\text{غیر}}$

$$\textcircled{2} \sin 8\alpha = -\sin \alpha \rightarrow \sin 8\alpha = \sin(-\alpha) \rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \max = \frac{4\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \rightarrow \max = \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

اینجا $\alpha = \pi$ جواب قابل قبول نیست پس $\max$ جوابها $\frac{4\pi}{9}$

۱۰- مجموع جوابهای مثلثی زیر

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$\textcircled{2} \checkmark$

$\frac{4\pi}{8} = \pi$ کسر ←

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$