19

ماهان نجفی

/ /

(۱) $8\cos x - \tan^2 x = 1 \rightarrow 8\cos x = 1 + \tan^2 x \rightarrow 8\cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^3 x = \dfrac{1}{8}$

$\rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \rightarrow \dfrac{\pi}{3} \checkmark \\ x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \rightarrow \dfrac{5\pi}{3} \checkmark \end{cases}$

پس تعداد جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر ۲ می‌باشد

۲ ✓

(۲) می‌دانیم کمترین مقداری که عبارت $5\sin^2 x$ می‌تواند داشته باشد برابر صفر می‌باشد از طرفی کمترین مقدار عبارت $\cos 3x$ نیز برابر ۱- می‌باشد پس داریم: $2\cos 3x \geq -2$ ، چون می‌توان هردوی این عبارت را همزمان با کمترین مقدار ممکن داشت پس می‌توان گفت: $5\sin^2 x + 2\cos 3x \geq -2$

چون سوال معادله را برابر ۲- قرار داده است پس می‌توان کمترین مقدار هر عبارت را به صورت جدا نوشت و بعد از جواب آن‌ها اشتراک گرفت:

$5\sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = -\pi, 0, \pi$

$2\cos 3x = -2 \rightarrow \cos 3x = -1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \dfrac{2k\pi + \pi}{3}$

$\rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{-\pi}{3}, -\pi$

۲ ✓

اشتراک جواب‌های این دو تا برابر $-\pi$ و π می‌باشد در نتیجه این معادله دارای ۲ جواب در بازه مورد نظر می‌باشد

(۳) $2\sin x \cos 2x + \sin x = 1 \rightarrow \sin x(2\cos 2x + 1) = 1$

$\rightarrow \sin x(2(1 - 2\sin^2 x) + 1) = 1 \rightarrow \sin x(2 - 4\sin^2 x + 1) = 1$

$\rightarrow \sin x(3 - 4\sin^2 x) = 1 \rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 1 \rightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0$

از آنجا که مجموع ضرایب توان‌های زوج با توان‌های فرد برابر می‌باشد پس یکی از ریشه‌های معادله ۱- می‌باشد پس عبارت را بر آن تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} 4\sin^3 x - 3\sin x + 1 & \sin x + 1 \\ \hline -4\sin^3 x - 4\sin^2 x & 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 \\ \hline -4\sin^2 x - 3\sin x + 1 & \\ +4\sin^2 x + 4\sin x & \\ \hline \sin x + 1 & \\ -\sin x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (\sin x + 1)(4\sin^2 x - 4\sin x + 1) = 0$

$\rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1)^2 = 0$

$\rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} , \sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

بنابراین مجموع ریشه‌های مورد نظر برابر است با: $S = \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{2}$

۲ ✓

حالا بخون

۴

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+4x)}=\frac{1}{\cos 2x}-\frac{1}{\sin 4x}=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\cos 2x}-\frac{1}{2\sin 2x\cos 2x}=\frac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x\cos 2x}=0 \rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12} \rightarrow \frac{\pi}{12}$$

$$\rightarrow \alpha=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

$$2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12} \rightarrow \frac{5\pi}{12} \rightarrow 2\alpha=\frac{2\pi}{3} \rightarrow \underline{\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}}$$

۳

۵

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1}{3} \rightarrow \cos(2x+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow -\sin 2x=-\frac{1}{3} \rightarrow \sin 2x=\frac{1}{3} \rightarrow m\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=\sqrt{6}$$

$$\rightarrow m\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6} \rightarrow m=\sqrt{36}=\boxed{6=m}$$

۲

۶

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3})=1$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3}-x) \rightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+x=x+\frac{\pi}{6} \rightarrow \cos(\frac{\pi}{3}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$$

$$\rightarrow \sin^2(x+\frac{\pi}{6})=1 \rightarrow \begin{cases} \cancel{\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}} \\ x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3} \\ \cancel{\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x=\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}} \end{cases}$$

در نتیجه دارای ~~۴~~ ۲ جواب در بازه مشخص شده است

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\pm 1$$

۱

۷

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{12} \rightarrow x=\frac{5\pi}{12}$$

۲

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{4} \rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{12} \rightarrow x=-\frac{\pi}{12},\frac{23\pi}{12}$$

$$\rightarrow S=\frac{27\pi}{12}=\boxed{\frac{9\pi}{4}}$$

ماکان نجفی

/ /

۸)

$4\sin x \sin(\frac{3\pi}{2}-x) = 4\sin(-\cos x) \to -4\sin x\cos x = 1$

$\to -2\sin 2x = 1 \to \sin 2x = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \to x = k\pi + \frac{5\pi}{8} \\ \to x = \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \to x = k\pi + \frac{7\pi}{8} \\ \to x = \frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \end{cases}$

۲ ✓

$\to S = \frac{40\pi}{8} = \boxed{5\pi}$

۹)

$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$

$(1+2\cos^2\alpha - 1)(1+2\cos^2 2\alpha - 1)(1+2\cos^2 4\alpha - 1) = \frac{1}{8}$

$\to (2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{8} \to (\cos^2\alpha)(\cos^2 2\alpha)(\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{64}$

$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}(\cos^2\alpha)(\cos^2 2\alpha)(\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{64} \times \frac{\sin^2 8\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{64} \to \sin^2 8\alpha = \sin^2\alpha$

$1)\ \sin 8\alpha = \sin\alpha \to \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \to 7\alpha = 2k\pi \to \alpha = \frac{2k\pi}{7} \\ \to \alpha = \cancel{0}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \to 9\alpha = 2k\pi + \pi \to \alpha = \frac{2k\pi + \pi}{9} \\ \to \alpha = \frac{\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \cancel{\frac{9\pi}{9}} \end{cases}$

$2)\ \sin 8\alpha = -\sin\alpha \to \sin 8\alpha = \sin(-\alpha) \to \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \to 9\alpha = 2k\pi \to \alpha = \frac{2k\pi}{9} \\ \to \alpha = \cancel{0}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \to 7\alpha = 2k\pi + \pi \to \alpha = \frac{2k\pi+\pi}{7} \\ \to \alpha = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \cancel{\pi} \end{cases}$

۲ ✓

طبق جواب‌های به دست آمده بزرگترین عضو مجموعهٔ A برابر $\frac{8\pi}{9}$ می‌باشد

۱۰)

$\tan(3x)\tan x = 1 \to \tan 3x = \cot x \to \tan 3x = \cot(\frac{\pi}{2} - x)$

$\to 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \to 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

$\to x = \cancel{\frac{\pi}{8}}, \cancel{\frac{3\pi}{8}}, \cancel{\frac{5\pi}{8}}, \cancel{\frac{7\pi}{8}}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \cancel{\frac{17\pi}{8}}$

$\to S = \frac{9\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \frac{48\pi}{8} = \boxed{6\pi}$

۲ ✓