

① می دانیم برای داشتن حد لازم است که هر چه ϵ را کوچکتر کنیم، δ را هم باید کوچکتر کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

از طرفی عبارت $\frac{x+2}{3}$ یک عبارت آسان محسوب می شود و نیازی به تغییر نمایی ندارد و از طرفی عبارت

$\frac{2-x}{2}$ یک عبارت تریگونومیتریک است پس علامت کمتر و بیشتر را عوض می کنیم و به عبارتی $\frac{2-x}{2} < \epsilon$ می یابیم:

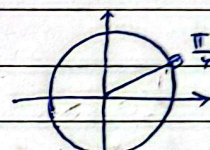
$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 2 - a \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 2 \rightarrow 2 - a = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \left[\frac{2}{3} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} [2 \sin x - 1]$$

$$x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} < \frac{1}{2} \rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} < 1 \rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} - 1 < 0 \rightarrow [2 \sin \frac{\pi}{4} - 1] = 0$$



② ابتدا از تابع $y = 8x^3 - x$ مشتق می گیریم و مشتق آن را در $x = -\frac{1}{2}$ قرار می دهیم و به دست می آوریم:

$$y = 8x^3 - x \rightarrow y' = 24x^2 - 1 \quad x = -\frac{1}{2} \rightarrow 24x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

پس تابع در این نقطه محسوب می شود و به عبارتی علامت بالای آن تغییر نمی کند.

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} [8x^3 - x] = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} [-\frac{1}{2}] = 0$$

③ ابتدا تغییر مقدار را با یک عدد درون محدوده تعیین می کنیم:

$$x \rightarrow (-\frac{1}{2})^- \rightarrow x < -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 > \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{x^2} < 4 \rightarrow \frac{3}{x^2} < 12 \rightarrow \left[\frac{3}{x^2} \right] = 11$$

$$\Rightarrow \text{عبارت صورت: } -\infty - \infty + 11 = 1$$

پس عبارت درون پرانتز منفی را تعیین می کنیم:

$$x < -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 > \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{x^2} < 4 \rightarrow \frac{-2}{x^2} > -8 \rightarrow \left[\frac{-2}{x^2} \right] = -8$$

حالا عبارت زیر منفرجه صفر مطلق پس حاصل حد تکریف شده است. $-8 - (-8) = 0$ مطلق

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{1}{0^+} = \infty$$

نکته

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{(1 + \cos \pi x)} = 1 - \cos \pi x \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \cos \pi x = 2 \quad (2)$$

در این صورت باید از فرمول هسپیتال استفاده کرد.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{-1}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3 - x - 1)x^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{x} + 1)(x - (-1))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2)x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} + 1(x+1)} = \left(\frac{2}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x+1}} \times \frac{x + \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x+1})}{(x - \sqrt{x+1})(x + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x+1})}{(x - 1)(x + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{10} = -\frac{1}{10}$$

از این فرمول می توان استفاده کرد.

$$x \rightarrow 0 \rightarrow a + \sqrt{c} = 0 \rightarrow \sqrt{c} = -a \rightarrow c = a^2 \quad (a < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{bx+c}}{x} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x\sqrt{bx+c}} = \frac{b}{x\sqrt{bx+c}} = \frac{1}{x} \rightarrow \sqrt{b} = \sqrt{c} \quad (b > 0)$$

$$\rightarrow \sqrt{b^2} = c \rightarrow \sqrt{b^2} = a^2 \rightarrow \sqrt{b} = a \rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{-\sqrt{b} \times b}{\sqrt{b^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{b}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{x + k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = \frac{x - \pi k}{0^+} = +\infty \rightarrow x - \pi k > 0 \rightarrow x > \pi k \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^-} \frac{x + k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = \frac{x - \pi k}{0^-} = -\infty \rightarrow x - \pi k < 0 \rightarrow x < \pi k$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\pi} < k < \frac{x}{\pi} \Rightarrow -\frac{x}{\pi} > -k > -\frac{x}{\pi} \rightarrow [-k] = \left(\frac{-1}{\pi} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a}{ax - a} \xrightarrow{Hop} \frac{a^x \ln a}{a} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \left(\frac{1}{\ln a} \right)$$

Parsian $\frac{1}{\ln a}$