علیرضا ... امتحانی:

۱۸٫۵

$(-2, 2)$ $(-2, 0)$

① وقتی تابعی حد دارد که حد چپ و راست آن برابر باشد پس الان باید حد چپ هم ۲ شود

$$x=-2 \begin{cases} (-2)^+ \to 2\left[1-\frac{x}{2}\right]+a\left[\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right]=2 \\ (-2)^- \to 2\left[1-\frac{x}{2}\right]+a\left[\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right] \to 4-a \overset{=2}{\Rightarrow} \boxed{a=2} \end{cases}$$

$(-2^-, 2^+)$ $(-2^-, 0^-)$

$$\to \left[\frac{a}{3}\right] \to \left[\frac{2}{3}\right]=0$$

۲

② چون در دایره مثلثاتی در ربع اول با پیشروی sin بیشتر می‌شود ← پس وقتی کوچک‌تر از $\frac{\pi}{4}$ sin کوچک‌تر از خود $\frac{\pi}{4}$ دارد

$$(\frac{\pi}{4})^- \to \boxed{\sin(\frac{\pi}{4})^- < \frac{1}{2}} \to 2\sin\frac{\pi}{4}^- < 1 \to \boxed{(2\sin(\frac{\pi}{4})^-)-1 < 0}\ \mathrm{I}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} [2\sin x-1] \xrightarrow{\mathrm{I}} [0^-] \to -1$$

۲

③

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} [8x^3-x] \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \left[-\frac{1}{2}\right] = -1$$

→ چون جواب داخل حد صحیح شد بنابراین جواب ← پس دیگر نیاز به حد چپ و راست گرفتن نیست ۲ ن

۲

برای احتیاط

$$\begin{cases} (-\frac{1}{2})^+ \to \left[-\frac{1}{2}^+\right] = -1 \\ (-\frac{1}{2})^- \to \left[-\frac{1}{2}^-\right] = -1 \end{cases}$$

مشتق عبارت مورد نظر: $\boxed{24x^2-1}$ ← $\underset{x=-\frac{1}{2}}{\lim}$ ⑤ ← پس در محل $-\frac{1}{2}$ صعودی است

که برای همین نگاه عدد بعد از جایگذاری بدون تغییر ماند

④

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{\cancel{16x}-x+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{\cancel{16x}-\left[-\frac{2}{x^2}\right]} = \frac{+1}{-14}$$

-10, 11, -8, 8^+, -16

$$\frac{+1}{-8^- -(-8)} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

$x^2 > \frac{1}{4} \leftarrow x < -\frac{1}{2}$ معکوس

$\frac{1}{x^2} < 4 \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{x^2} < 12$

$\times -2$: $\frac{-2}{x^2} > -8$

۱٫۵

⑤

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x} \to \frac{\sin^2\pi x}{1+\cos\pi x} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \frac{(1-\cos\pi x)\cancel{(1+\cos\pi x)}}{\cancel{1+\cos\pi x}}$$

$1-\cos^2\pi x$, $[1^+] = 1$

$$1-\underbrace{\cos\pi}_{-1} = 2$$

۲

راه ۱) Hop

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[\text{رفع ابهام}]{\frac{0}{0}} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

جایگذاری $x=-1$:

$$\frac{\frac{2}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\boxed{-1.5}$$ ✓

۲

راه ۲) ضرب در مزدوج

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}\times\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1-\sqrt[3]{x}}=$$

$-x-1 \to -(x+1)$

$$\to\frac{(2x+3-3x-4)(\sqrt[3]{x^2}+1-\sqrt[3]{x})}{(1+x)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4})}\longrightarrow\frac{-1\times(\sqrt[3]{x^2}+1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{3x+4}}=\frac{-3}{2}=-1.5$$

۷)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}} \xrightarrow[\text{رفع ابهام}]{\frac{0}{0}} \times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}=\frac{(2\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-1)(2x+\sqrt{3x+1})}{\cancel{4x^2-3x-1}}$$

۴

تجزیه $(x-1)(4x+1)$

$$\to\frac{(2\sqrt{x}-5)\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2x+\sqrt{3x+1})}{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}(4x+1)}\xrightarrow{x=1}\frac{-3\times 4}{2\times 5}=\boxed{-1.2}$$ ✓

۸) چون مخرج صفر شده اما حد دارد پس صورت هم باید صفر شود ←

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+\sqrt{bx+c}}{x}=\frac{1}{4}\to a+\sqrt{c}=0\to a=-\sqrt{c}$$

پس از Hop باید مقدار $\frac{1}{4}$ شود

$$\to\frac{\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}}{1}\xrightarrow{x=0}\frac{b}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{4}\to\sqrt{c}=2b$$ ✓

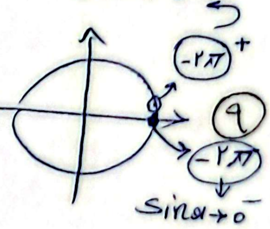
۲

$$\to c=4b^2,\quad a=-\sqrt{c}=-2b \;\Big\}\to \frac{ab}{c}=\frac{-2b^2}{4b^2}=\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to -2\pi}\frac{4+k\left[\frac{x}{\pi}\right]}{\sin x}=+\infty$$

$(-2\pi)^+$: $\frac{4+k\left[\frac{(-2\pi)^+}{\pi}\right]}{0^+}\to\boxed{\frac{4-2k}{0^+}=+\infty}$, $(-2)^+\to -2$

$(-2\pi)^-$: $\frac{4+k\left[\frac{(-2\pi)^-}{\pi}\right]}{0^-}\to\boxed{\frac{4-3k}{0^-}=+\infty}$, $(-2)^-\to -3$



۲

نتیجه ←
$$\begin{cases}4-2k>0\to 4>2k\to 2>k\\ 4-3k<0\to 4<3k\to \frac{4}{3}<k\end{cases}\to\boxed{\frac{4}{3}<k<2}\to\boxed{-\frac{4}{3}>-k>-2}\to\boxed{[-k]=-2}$$ ✓

۱۰)

۱

جایگذاری $\to\frac{0}{8a-b}=$ حد دارد و غیر صفر $\frac{0}{0}$ $\;8a-b=0\to a=\frac{b}{8}\to b=8a$ ✓

$b\to 8a$

$$\text{Hop}\to \frac{\frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}\longrightarrow\frac{8\times 2\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow{x=8}\frac{8\times 2\times 2}{3\times 4}=\frac{8}{3}$$

سوال ۵۱

$$\lim_{x\to 8} \frac{85\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2\right)}{5x-85} = \frac{85\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2\right)}{5x-85} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2} =$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{85\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{5(x-8)\times 4} \longrightarrow \lim_{x\to 8} \frac{2\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+4+2\sqrt[3]{x}\right)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$