۱۸

نام و نام خانوادگی ......آترین جلیلی......... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ....۲... کلاس .دوازدهم..سری..۸......

۱	$\lim_{x\to 2} \dfrac{3x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$ صورت : $2(2)-5=-1$ $\to$ مخرج باید ۰ باشد تا جواب $-\infty$ شود $\to$ مخرج : $(x-2)^2 = x^2-4x+4 = x^2+ax+b$ $\to a=-4,\ b=4 \to a+b=0$ ۲
۲	$\lim_{x\to \sqrt[3]{4}} \dfrac{x}{x^2+ax+b} = +\infty$ چون صورت مثبت است پس حد مخرج برابر ۰ است پس مخرج ریشه مزدوج دارد $x=\sqrt[3]{4}$ $(x-\sqrt[3]{4})^2 = x^2-2\sqrt[3]{4}x+2\sqrt[3]{2} = x^2+ax+b \to a=-2\sqrt[3]{4},\ b=2\sqrt[3]{2}$ $\to \left[\dfrac{b}{a}\right] = \left[\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{-2\sqrt[3]{4}}\right] = \left[-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}\right] = \left[-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] = -1$ ۲
۳	$\lim_{x\to (\frac{1}{3})^+} \dfrac{[-x]+a}{\lvert\frac{3}{2}x+a\rvert+a} = -\infty$ $\quad x\to(\frac{1}{3})^+ \to x>\frac{1}{3} \to -x<\frac{-1}{3} \to [-x]=-1$ $\to \frac{3}{2}x>\frac{1}{2} \to \frac{3}{2}x=(\frac{1}{2})^+$ $\to \dfrac{-1+a}{\lvert(\frac{1}{2})^++a\rvert+a} = -\infty$ $\to \lvert\frac{1}{2}^++a\rvert+a=0^+$ $\to \frac{1}{2}^++2a=0^+ \to \frac{1}{2}+4+2a=4 \to a=\frac{-1}{4} \to [a]=-1$ ۲
۴	$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \dfrac{14x-[-\frac{2}{x^2}]}{24x+[\frac{3}{x^2}]} = \dfrac{14(-\frac{1}{2})-(-8)}{24(-\frac{1}{2})+11} = \dfrac{-7+8}{-12+11} = \dfrac{1}{-1} = -1$ $x>-\frac{1}{2} \to x^2<\frac{1}{4} \to \frac{1}{x^2}>4 \to \frac{3}{x^2}>12 \to [\frac{3}{x^2}]=12 \quad \frac{1}{x^2}>4 \to \frac{-2}{x^2}<-8 \to [\frac{-2}{x^2}]=-9$ $x\to(-\frac{1}{2})^+ \to x>\frac{-1}{2} \to x^2>\frac{1}{4} \to \frac{1}{x^2}<4 \to \begin{cases} -\frac{2}{x^2}>-8 \to [\frac{-2}{x^2}]=-8 \\ \frac{3}{x^2}<12 \to [\frac{3}{x^2}]=11 \end{cases}$ $\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \dfrac{14x+9}{24x+12} = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} \dfrac{-7+9}{0^+} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$ ۰
۵	$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x^3-[x^3]} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x+2)}{(x^2+2x+4)}$ $= \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ $x\to 2^+ \to x>2 \to x^3>8 \to [x^3]=8$ ۲

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)}{6(\sqrt[3]{x}+2)} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(x+8)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{6(x+8)} = \lim_{x\to -8} \frac{(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{6}$$

$$= \frac{(-6)(3\times 4)}{6} = \boxed{-12}$$

۲

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+3x^2}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{\underbrace{1-\cos x}_{\frac{x^2}{2}}}}$$

می‌دانیم اگر $u\to 0$ هم‌ارزی $1-\cos u \sim \frac{u^2}{2}$ برقرار است

سپس با جایگذاری $x=0$ در کسر به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم و سپس از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2+3x^2}-\sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{|x|}_{-x}} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \boxed{-2}$$

۲

$$\lim_{x\to 0} \frac{k+\cos(\sqrt{a}\,x)}{kx^2} = 3 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{k+\cos(\sqrt{a}\,x)}{kx^2} = \frac{k+1}{0} \overset{\text{چون حد صحیح بوده}}{=} \frac{0}{0} \longrightarrow \boxed{k=-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1+\cos(\sqrt{a}\,x)}{-x^2} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 0} \frac{-\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}\,x)}{-2x} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{-a\cos(\sqrt{a}\,x)}{-2} = \frac{-a}{-2} = 3$$

$$\longrightarrow \boxed{a=6} \longrightarrow \frac{a}{k} = \frac{6}{-1} = \boxed{-6}$$

۲

$$\lim_{x\to (3a)^+} \frac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} = \frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{x\to 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a}+3(\sqrt{x}-\sqrt{3a})}{\sqrt{(x-3a)(x+3a)}} = \lim_{x\to 3a^+}\left(\frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x-3a}\sqrt{x+3a}} + \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{3a})}{\sqrt{x^2-9a^2}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3a}}{\sqrt{x}+\sqrt{3a}}\right)$$

$(a>0)$

$$= \lim_{x\to 3a^+}\left(\frac{2}{\sqrt{x+3a}} + \frac{3(x-3a)}{(\sqrt{x}+\sqrt{3a})(\sqrt{x+3a})(\sqrt{x-3a})}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3a^+}\left(\frac{2}{\sqrt{x+3a}} + \frac{3\sqrt{x-3a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{3a})(\sqrt{x+3a})}\right) = \frac{2}{\sqrt{6a}} + \frac{\overset{0}{3\sqrt{3a-3a}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{3a})(\sqrt{x+3a})} = \frac{2}{\sqrt{6a}} = \sqrt{\frac{2}{3a}}$$

۲

$$\lim_{x\to(-1)} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1+k}{x^2-1} = \frac{1+k}{0^-} = -\infty$$

$$\longrightarrow 1+k>0 \longrightarrow \boxed{k>-1} \quad \text{I}$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{1-k[x]}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{1+2k}{x^2-1} = \frac{1+2k}{0^+} = -\infty \longrightarrow 1+2k<0 \longrightarrow \underline{k<\frac{-1}{2}} \quad \text{II}$$

$$\text{I}\cap\text{II} \longrightarrow -1<k<\frac{-1}{2} \longrightarrow -\pi<k\pi<-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos(-\pi)<\cos k\pi<\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow -1<\cos k\pi<0$$

۲

مؤلفه‌ی اول و دوم همواره منفی هستند پس در ربع سوم قرار دارد.