

نبره‌های منجر به

- ۱- اگر تابع و بر و در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد مقدار b ایجابی.
- (b بر حسب اعلان و $0 < b < \pi$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{9x^2 + (m+3)x + \frac{m}{4}}}{|2x^2 + (m-3)x + a^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}} & x = a \end{cases}$$

در ضابطه اول صورت برابر صفر و تریف شده با سراسر اعداد فقط در $x=a$ تعریف نشده باشد. $\Delta \leq 0$

$$\Delta = (m+3)^2 - 4 \times \frac{m}{4} = m^2 + 9 - 4m = (m-3)^2 \xrightarrow{\Delta \leq 0} (m-3)^2 = 0 \rightarrow m=3$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{9x^2 + 9x + \frac{3}{4}}}{|2x^2 + a^2|} = \frac{\sqrt{9} |x + \frac{1}{4}|}{|2x^2 + a^2|} \xrightarrow{x=a} \frac{\sqrt{9} |a + \frac{1}{4}|}{2a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{9} |a + \frac{1}{4}|}{3a^2} \xrightarrow{2a^2 + a^2 = 0} 2a^2 + a^2 = 0 \rightarrow a^2(2a+1) = 0$$

$$a = -\frac{1}{4} \rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{9} |x + \frac{1}{4}|}{|2x^2 + \frac{1}{16}|} = \frac{\sqrt{9} |x + \frac{1}{4}|}{2|x + \frac{1}{4}| |x - \frac{1}{4}|} = \frac{\sqrt{9}}{2|x - \frac{1}{4}|} \xrightarrow{x = -\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{9}}{\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{9}}{3}$$

$$y_2 = \frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}} \xrightarrow{x=a} \frac{2 \tan b}{\sqrt{-(-\frac{1}{4})}} = \frac{2 \tan b}{\frac{1}{2}} = 4 \tan b = \frac{2\sqrt{9}}{3} \rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{9}}{6} \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

- ۲- اگر در ضابطه ای از معادله $ax^2 - bx + c = 0$ دو تابع f موجود

بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $\left[\frac{b-2a}{3} \right]$ ایجابی

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$$

تابع f در $x=a$ پیوسته نیست چون درخرج $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$$

داریم و عدد در این نقطه موجود است:
چون در حد $x \rightarrow 1$ ،خرج باعث مغزنی می‌شود
پس حد صورت نیز باید به آن انا به مغزنی کند

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + ax + b = 0 \rightarrow 1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -1$$

و $x=1$ ریشه معادله $x^2 - ax + b = 0$ نیز هست:

$$1 - a + b = 0 \Rightarrow b - a = -1$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ b - a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \quad \left[\frac{b-2a}{3} \right] = \left[\frac{-1-0}{3} \right] = \left[-\frac{1}{3} \right] = -\frac{1}{3}$$

پرهام شرعی

۳- تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است. مقدار a, b را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \tan \frac{(x+1)\pi}{4} & x \leq 1 \\ \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} & 1 < x < 5 \\ b(x - [-x]) & x \geq 5 \end{cases}$$

در $x=1$ پیوستگی: $\tan \frac{2\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{a(1-x)} \Rightarrow -1 = \frac{2}{-a} \Rightarrow a = 2$

در $x=5$ پیوستگی: $b(5 - [-5]) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} \Rightarrow 10b = \frac{28}{2(-4)} \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$

$a \times b = 2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -7$ ✓

۲

۴- تابع غیر صفر $f(x) = a[x+1] + b[x + [a+1]]$

در $\mathbb{R}$ پیوسته است، مقدار $\frac{a[a]}{f(a)}$ را بیابید.

$$f(x) = a[x+1] + b[x + [a+1]] \rightarrow a([x]+1) + b([x] + [a]+1)$$

$$a[x] + a + b[x] + b[a] + b \sim f(x) = (a+b)[x] + (a+b) + b[a]$$

تابع یکپارچه در تمام نقاط نامیوسته است پس ضرایب $[x]$ برابر است.
 $a+b \neq 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow f(x) = b[a]$

$$\Rightarrow \frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{b[a]} = \frac{a}{b} \xrightarrow{a=-b} \frac{-b}{b} = -1$$
 ✓

۲

برهان شریعی

۳- تابع فاصفر $\mathbb{R} \rightarrow f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$

بی‌سسته است مقدار $\frac{a}{f(b)}$ را بیابید.

$$f(x) = b[x^2 - ax] - 2a = b[x(x-a)] - 2a \xrightarrow{b=0} f(x) = -2a$$

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

(۲)

۴- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx + n}{a-x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$

$\mathbb{R}$ بی‌سسته است. $f(2a) = 0$ باشد مقدار $n-m$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + mx + n}{a-x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{چون خروجی عددی شود پس صورت نیز باید} \\ \text{صفر باشد} \end{array} \right. \quad f(a) = 2$$

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-2a)}{a-x} = \frac{x^2 + mx + n}{a-x} \rightsquigarrow x^2 + mx + n = x^2 - 2ax + 2a^2$$

$$\begin{cases} m = -2a \\ n = 2a^2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-2a)}{a-x} = -(a-2a) = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \rightarrow a = 2 \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 8 \end{cases} \rightarrow n-m = 8 - (-4) = 12 \quad \checkmark$$

(۲)

محدود شریعی

۷- تابع زیر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (1-a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مقدار $\frac{a}{b}$ را بیابید

$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x)$ $k \in \mathbb{Z}$

$$(1-a)(k) + (1-a^2-1)(-k-1) = (1-a)(k-1) + (1-a^2-1)(-k)$$

$$k - ka - 1 + ka^2 - 1 + k + 1 = k - 1 - ak + a - 1 + ka^2 + k = b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

$$ka^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow -2 = b \sin(-\pi) \sim -b \sin(\pi) = -2 \\ a = \frac{1}{k} \rightarrow -\frac{1}{k} = b \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \sim b = \frac{1}{k} \end{cases}$$

$a = -1$ $\times$

$a = \frac{1}{k}$ $\checkmark$

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1$ $\checkmark$

(۲)

۸- اگر تابع f با ضابطه زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + mx - m - 1|}{m|x-1| + |x+1|} & x \neq 1 \\ \frac{m}{m+2} & x = 1 \end{cases}$$

را بیابید $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|/|x+(m+1)|}{|x-1|(m/|x+1|+1)} = \frac{|x+(m+1)|}{m|x+1|+1} = \frac{1}{m+2}$$

در این حالت $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \geq -2 \Rightarrow m^2 + m = (m+2)^2 \rightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \\ m < -2 \Rightarrow m^2 + m = -(m+2)^2 \rightarrow m^2 + 4m + 5 = 0 \end{cases}$$

$m = -1$ $m = -4$

فرض کنیم $m = -4$ $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ جواب ندارد

فرض کنیم $m = -1$ $\Rightarrow$ تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است $\Rightarrow m = -4$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+2|}{(4|x+1|+1)} = \frac{|1/2+2|}{4|1/2+1|+1} = \frac{5/2}{6} = \frac{5}{12}$$

$\checkmark$

(۲)

چهارم شریعی

۹- تابع نامعین f با ضابطه زیر روی $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد مقدار آن را بیابید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} |ax + a|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|}$$

با این فرض که f در $x=a$ پیوسته باشد (همان $x=a$) چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود است یعنی علاوه بر این f در $x=a$ هم هست.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} |ax + a|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|} = \frac{\sqrt{x} |a| |x+1|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|}$$

چون $x=-1$ در صورت است پس $a=-1$ هم هست.

$$x^3 + (m-2)x + a^2 \xrightarrow{x=-1, a=-1} 0 \Rightarrow (-1)^3 + (m-2)(-1) + (-1)^2 = 0 \Rightarrow -1 - m + 2 + 1 = 0 \Rightarrow -m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} |a| |x+1|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|} \sim \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} |x+1|}{|x^3 - x + 1|} = \frac{\sqrt{-1}}{|(-1)^3 - (-1) + 1|} = \frac{\sqrt{-1}}{|-1 + 1 + 1|} = \frac{\sqrt{-1}}{1} = \sqrt{-1}$$

۱۰- اگر تابع f با ضابطه زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد مقدار

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \frac{|x|(\frac{1}{2}|x| + 1)}{|x|(1|x| + a)} = \frac{\frac{1}{2}|x| + 1}{1|x| + a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2} \sim 2a^2 - a = 2a + 2 \sim 2a^2 - 3a - 2 = 0 \Rightarrow (2a+1)(a-2) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \sim f(x) = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| - \frac{1}{2})} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + 2)} = \frac{-2(-2+1)}{-2(-2+2)} = \frac{-2(-1)}{0} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + 2)} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} \quad a = 2 \iff$$