

نیرهام شریعی

- ۱- اگر تابع و برود $\mathbb{R}$ پیوسته باشد مقدار b را بیابید.
(b بر حسب a بیان و $0 < b < \pi$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{9x^2 + (m+3)x + \frac{m}{9}}}{|2x^2 + (m-3)x + a^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}} & x = a \end{cases}$$

در ضابطه اول صورت بر پایه همواره تعریف شده با همراهِ حد اول فقط در $x=a$ تعریف نشده باشد پس $\Delta \leq 0$

$$\Delta = (m+3)^2 - 4 \times 9 \times \frac{m}{9} = m^2 + 9 - 4m = (m-3)^2 \xrightarrow{\Delta \leq 0} (m-3)^2 = 0 \rightarrow m=3$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{9x^2 + 4x + \frac{1}{9}}}{|2x^2 + a^2|} = \frac{\sqrt{9} |x + \frac{1}{9}|}{|2x^2 + a^2|} \xrightarrow{x=a} \frac{\sqrt{9} |a + \frac{1}{9}|}{2a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{9} |a + \frac{1}{9}|}{3a^2} \xrightarrow{x=a} \frac{\sqrt{9} |a + \frac{1}{9}|}{3a^2} = \frac{\sqrt{9} |a + \frac{1}{9}|}{3a^2}$$

$$a = -\frac{1}{9} \rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{9} |x + \frac{1}{9}|}{|2x^2 + \frac{1}{81}|} = \frac{\sqrt{9} |x + \frac{1}{9}|}{2|x + \frac{1}{9}|^2} = \frac{\sqrt{9}}{2|x + \frac{1}{9}|} \xrightarrow{x = -\frac{1}{9}} \frac{\sqrt{9}}{2 \times \frac{1}{81}} = \frac{9\sqrt{9}}{2}$$

$$y_2 = \frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}} \xrightarrow{x=a} \frac{2 \tan b}{\sqrt{-a}} = \frac{2 \tan b}{\sqrt{\frac{1}{81}}} = \frac{2 \tan b}{\frac{1}{9}} = 18 \tan b \xrightarrow{y_1 = y_2} \frac{9\sqrt{9}}{2} = 18 \tan b \rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{9}}{2} \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

- ۲- اگر در حقیقتی ای از معادله $\alpha x^2 - \alpha x + b = 0$ دو تابع f موجود

بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $\left[\frac{b-a}{3} \right]$ را بیابید

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$$

تابع f در $x=a$ پیوسته نیست چون درخرج $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$$

داریم و عدد در این نقطه موجود است:
چون در حد $x \rightarrow 1$ ،خرج باعث مغزنی می شود
پس حد صورت نیز باید به آن انا به مغزنی کند

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + ax + b = 0 \rightarrow 1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -1$$

و $x=1$ ریشه معادله $x^2 - ax + b = 0$ نیز هست:

$$0 - a + b = 0 \Rightarrow b - a = a$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ b - a = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \quad \left[\frac{b-a}{3} \right] = \left[\frac{-3-2}{3} \right] = \left[-\frac{5}{3} \right] = -\frac{5}{3}$$

پرهام شرعی

۳- تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است. مقدار a, b را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \tan \frac{(x+1)\pi}{4} & x \leq 1 \\ \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} & 1 < x < 5 \\ b(x - [-x]) & x \geq 5 \end{cases}$$

در $x=1$ پیوستگی: $\tan \frac{2\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{a(1-x)} \Rightarrow -1 = \frac{2}{-a} \leadsto a = 2$

در $x=5$ پیوستگی: $b(5 - [-5]) : \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} \leadsto 10b = \frac{28}{2(-4)} \leadsto b = -\frac{7}{2}$

$$a \times b = 2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -7$$

۴- تابع غیر صفر $f(x) = a[x+1] + b[x+[a+1]]$

در $\mathbb{R}$ پیوسته است، مقدار $\frac{a[a]}{f(a)}$ را بیابید.

$$f(x) = a[x+1] + b[x+[a+1]] \rightarrow a([x]+1) + b([x]+[a]+1)$$

$$a[x]+a+b[x]+b[a]+b \leadsto f(x) = (a+b)[x] + (a+b) + b[a]$$

تابع یکپارچه در تمام نقاط نامیوسته است پس ضرایب $[x]$ برابرند.
 $a+b \neq 0 \leadsto a = -b \leadsto f(x) = b[a]$

$$\Rightarrow \frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{b[a]} = \frac{a}{b} \xrightarrow{a=-b} \frac{-b}{b} = -1$$

برهان شریعی

۳- تابع فاصفر $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$ در $\mathbb{R}$

پیوسته است مقدار $\frac{a}{f(b)}$ را بیابید.

$$f(x) = b[x^2 - ax] - 2a = b[x(x-a)] - 2a \xrightarrow{b=0} f(x) = -2a$$

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

۴- تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx + n}{a-x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

اگر $f(2a) = 0$ باشد مقدار $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + mx + n}{a-x}$$

چون $f(2a) = 0$ پس صورت $x^2 + mx + n$ در $x=2a$ صفر می‌شود.
 مخرج $a-x$ در $x=a$ صفر می‌شود.
 پس $f(a) = 2$

چون $f(2a) = 0$ پس در $x=2a$ صورت $(x-2a)$ نیز صفر می‌شود.

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-2a)}{a-x} = \frac{x^2 + mx + n}{a-x} \rightsquigarrow x^2 + mx + n = x^2 - 2ax + 2a^2$$

$$\begin{cases} m = -2a \\ n = 2a^2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-2a)}{a-x} = -(a-2a) = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \rightarrow a = 2 \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 8 \end{cases} \rightarrow n-m = 8 - (-4) = 12$$

محمد شریعی

۷- تابع زیر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (1-a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(1-a)(k) + (1-a^2-1)(-k-1) = (1-a)(k-1) + (1-a^2-1)(-k) = b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

$$k - ka - 1 + ka^2 - 1 + k + 1 = k - 1 - ak + a - 1 + ka^2 + k = b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

$$ka^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow -2 = b \sin(-\pi) \sim -b \sin(\pi) = -2 \\ a = \frac{1}{k} \rightarrow -\frac{1}{k} = b \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \sim b = \frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\frac{a = \frac{1}{k}}{b = \frac{1}{k}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1$$

۸- اگر تابع f با ضابطه زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + mx - m - 1|}{m|x-1| + |x+1|} & x \neq 1 \\ \frac{m}{m+1} & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|/|x+(m+1)|}{|x-1|(m/|x+1|+1)} = \frac{|x+(m+1)|}{m|x+1|+1} = \frac{|m+2|}{2m+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \begin{cases} m \geq -2 \Rightarrow m^2 + m = (m+2)^2 \rightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \\ m < -2 \Rightarrow m^2 + m = -(m+2)^2 \rightarrow m^2 + 5m + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+1} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{(-|x+1|+1)} \\ m = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{|x+5|}{(4|x+1|+1)} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|x+5|}{(4|x+1|+1)} = \frac{|\frac{1}{2}+5|}{4|\frac{1}{2}+1|+1} = \frac{\frac{11}{2}}{6} = \frac{11}{12}$$

چهارم شریعی

۹- تابع نامعین f با ضابطه زیر روی $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد مقدار آن را بیابید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} |ax + a|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|}$$

این تابع نقطه $x=a$ را داشته باشد (همان $x=a$) چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود است یعنی $x=a$ علاوه بر این تابع ریشه صورت هم هست.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} |ax + a|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|} = \frac{\sqrt{x} |a| |x+1|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|}$$

چون $x=-1$ ریشه صورت است پس ریشه $x=-1$ هم هست. پس $a=-1$

$$x^3 + (m-2)x + a^2 \xrightarrow{x=-1, a=-1} 0 \Rightarrow (-1)^3 + (m-2)(-1) + (-1)^2 = 0 \Rightarrow -1 - m + 2 + 1 = 0 \Rightarrow -m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} |a| |x+1|}{|x^3 + (m-2)x + a^2|} \sim \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} |x+1|}{|x^3 - x + 1|} = \frac{\sqrt{-1}}{|(-1)^3 - (-1) + 1|} = \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{x}}{1}$$

۱۰- اگر تابع f با ضابطه زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد مقدار

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} & x \neq 0 \\ \frac{2a-1}{2a+2} & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \frac{|x|(\frac{1}{2}|x| + 1)}{|x|(1|x| + a)} = \frac{\frac{1}{2}|x| + 1}{1|x| + a} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2a-1}{2a+2} \sim 2a^2 - a = 2a + 2 \sim 2a^2 - 3a - 2 = 0 \rightarrow (2a+1)(a-2) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \sim f(x) = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| - \frac{1}{2})} \Rightarrow \text{خرج ریشه} \quad a = 2 \sim f(x) = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + 2)} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} \quad a = 2 \Leftarrow$$