A-۲ شنبه ۲۱/۶

(۱)

f پیوسته در $x=a$ و پیوسته در R $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(۲)

برای موجود بودن حد در یک نقطه اما ناپیوسته بودن، تابع باید در آن نقطه تعریف نشده باشد (که در اینجا تنها راهش این است که مخرج صفر باشد) نقطه مورد نظر: $(x=1)$ اما حد آن موجود باشد ($\neq \infty$ نباشد و دارای مقدار باشد، چپ و راست برابر باشد). پس برای اینکه حد در $x=1$ موجود باشد و حد $\neq \infty$ شود صورت نیز در این مکان باید 0 باشد تا $\frac{0}{0}$ مبهم شود:

$1^2+a(1)+b=0 \Rightarrow a+b=-1$

$5(1)^2-a(1)+b=0 \Rightarrow -a+b=-5$

$\Rightarrow a=2, b=-3$

پس $x=1$ همان ریشه $5x^2-ax+b=0$ نیز هست:

$\Rightarrow \left[\frac{b-2a}{3}\right] = \left[\frac{-3-2(2)}{3}\right] = \left[-\frac{7}{3}\right] = \boxed{-3}$

(۳) در بازه $1<x<5$، f را تعریف می‌کنیم:

$$\frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} = \frac{|(x+2)(x-1)|}{a(1-x)} = \frac{-(x+2)(x-1)}{-a(x-1)} = \frac{x+2}{a}$$

-2 | $+$ | $-$ | $+$ | 1 | 2

در بازه قرمز رنگ عبارت داخل قدر مطلق $\ominus$ است

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{(2x+1)\pi}{4}\right) & ; x<1 \\ \frac{x+2}{a} & ; 1<x<5 \\ b(x-[-x]) & ; x\geq 5 \end{cases}$$

برای پیوستگی f در بازه $[1,5]$ داریم:

I) $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{a}$

$\Rightarrow -1 = \frac{3}{a} \Rightarrow a = -3$

II) $f(5) = \lim_{x\to 5^-} f(x) \Rightarrow b(5-(-5)) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x+2}{a}$

$\Rightarrow 10b = \frac{7}{-3} \Rightarrow b = -\frac{7}{30}$

$\Rightarrow ab = (-3)\left(-\frac{7}{30}\right) = \boxed{\frac{7}{10}}$

OLand

۴

$\Rightarrow f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a+1] = (a+b)[x] + (a+b) + b[a]$

تابع در همه جا پیوسته است پس: $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

در تابع $[x]$ تابع در k صحیح $\lim_{x\to k^+} f(x) = f(k)$ ، چون تابع بالا نیز تنها انتقال و انبساط و انقباض است ، این تابع f هم این ویژگی را دارد پس کافی است:

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow a+b+b[a] = -(a+b)+(a+b)+b[a] \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a$

$\Rightarrow f(x) = (0)[x] + (0) + b[a] = b[a] = -a[a]$ پس f تابعی ثابت است

$f(a) = -a[a] \Rightarrow \frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = \boxed{-1}$

۵

تابع [درجه دوم] یا [سهمی] هیچگاه (حتی با انتقال و انبساط و انقباض) خطی نخواهد شد پس این تابع یا خط باید باشد (که نمی‌شود برای استدلال) یا تابع ثابت.

$\Rightarrow b=0 \ , \ f(x) = -2a \quad (a\neq 0)$

$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{-2a} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

۶

$f(a) = \lim_{x\to a} f(a) \Rightarrow 2 = \lim_{x\to a} \frac{x^2+mx+n}{a-x} \to 0 =$ مخرج

چون حد وجود دارد $\Leftarrow$ $x=a$ ریشه صورت است. از طرفی $x=2a$ ریشه مخرج است از آنجایی که $x\neq 2a$ پس ریشه $\frac{x^2+mx+n}{a-x}$ ریشه x^2+mx+n است. در ریشه صورت را یافتیم:

$x^2+mx+n = 1(x-a)(x-2a)$

$2 = \lim_{x\to a} \frac{x^2+mx+n}{a-x} = \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)(x-2a)}{-(x-a)}\right) = \lim_{x\to a} \frac{x-2a}{-1} = a \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow x^2+mx+n = (x-2)(x-4) \Rightarrow x^2+mx+n = x-6x+8 \Rightarrow m=-6, n=8 \Rightarrow n-m = 8-(-6) = \boxed{14}$

۷

پیوسته $x=0$: $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\Rightarrow b\sin\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0 + (3a^2-1)(-1) = (1-a)(-1) + 0 \Rightarrow b\sin\frac{\pi}{a} = \underbrace{1-3a^2 = a-1}$

$\Rightarrow 3a^2+a-2=0 \Rightarrow 3(a+1)(a-\frac{2}{3})=0 \Rightarrow a=-1$ یا $a=\frac{2}{3}$

$a=-1: b\sin\left(\frac{\pi}{-1}\right) = (-1-1) \Rightarrow b\underbrace{\sin(-\pi)}_{0} = -2 \Rightarrow 0=-2$ غ ق ق

$a=\frac{2}{3}: b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{3}-1 \Rightarrow -b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$ ✓ $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$

۸

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+mx-m-1|}{|x-1|(m|x+1|)}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1||x+m+1|}{m|x-1||x+1|}=\frac{|2+m|}{2m}$$

دو شرط $x=1$:

$$\frac{m}{m+2}$$

$$\begin{cases} m>0 \Rightarrow 2m^2=(m+2)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\,\cancel{|m|}^{\,m}=\cancel{|m+2|}^{\,m+2} \Rightarrow m=2(\sqrt{2}+1) \\ -2\le m<0 \Rightarrow 2m^2=(m+2)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\,\cancel{|m|}^{\,-m}=\cancel{|m+2|}^{\,m+2} \Rightarrow m=-2(\sqrt{2}-1) \\ m<-2 \Rightarrow 2m^2=-(m+2)^2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۹

روی $x=a$ تعریف نشده پس مخرج در $x=0$ صفر است و چون در همسایگی $x=a$ خودداریم، صورت نیز باید 0 باشد (تا هم شود و بتوانیم حد را حساب کنیم)

$$\begin{cases} \text{مخرج) } a^3+(m-2)a+a^2=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } a^2+a+m-2=0 \\ \text{صورت) } \sqrt{3}(a^2+a)=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } a=-1 \end{cases} \Rightarrow a=0 \text{ یا } \begin{cases} a=-1 \\ -1+m-2=0 \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

اگر $a=0$ تابع $f(x)=0$ می‌شود اما دامنه آن یک به مقدار آن و بیشتر های مختلف مخرج تغییر می‌کند و $\mathbb{R}-\{0\}$ نخواهد بود (غ ق ق)

پس $a=-1$ و $m=2$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3}\,|-x-1|}{|x^3+x||}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3}\,|x+1|}{|x+1||x^2+x+1|}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3}}{|1|}=\boxed{\sqrt{3}}$$

۱۰

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow \frac{2a-1}{2a+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2+ax+a}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x^2-a}$$

$$\Rightarrow \frac{2a-1}{2a+1}=\frac{1}{a}\Rightarrow 2a^2-a=2a+1\Rightarrow 2a^2-3a-1=0\Rightarrow (a-1)(a-\tfrac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } a=\frac{1}{2}$$

OLand