

پروهام مشرعی ۲۰

۱- تابع f با منطقی زیر در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a+b$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b \sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

نقطه مشتق ناویژه: $x=1$

بررسی $\lim_{x \rightarrow 1^-} b \sqrt[3]{x} = b \rightarrow b = a+1$

بررسی $\lim_{x \rightarrow 1^+} a + |x| = a+1$

بررسی مشتق پذیری در $x=1$:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} a+b & x < 1 \\ b \sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 1 \\ f'_+(1) = b \times \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{3} b \end{cases}$$

$\rightarrow \frac{1}{3} b = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{1}$

$a+b = \frac{1}{3} + \frac{3}{1} = 2 \checkmark$

$a = \frac{1}{3} \leftarrow b = a+1$

۲- اگر $f(x) = \frac{|2x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ را بیابید.

$$y = (f - 2g)(x) \Rightarrow y = \left(\frac{|2x-2|}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \times \frac{|x-1| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \Rightarrow y = -2\sqrt{3} x^{-\frac{1}{4}}$$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} y' = (-2\sqrt{3}) \times (-\frac{1}{4}) \times (x^{-\frac{1}{4}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{4}} \rightarrow g'(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

مهم شریفی

۳- به ازای هر مقدار حقیقی و نامنفی a ، تابع f روی R

مشتق پذیر است مقدار a را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$$

برای پیوستگی: $ab+c = \frac{1}{a} \xrightarrow{*} a(-\frac{1}{a^2}) + c = \frac{1}{a} \rightarrow -\frac{1}{a} + c = \frac{1}{a} \rightarrow c = \frac{2}{a}$

مشتق: $f'(x) = \begin{cases} b & x < a \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq a \end{cases} \rightarrow f'_+(a) = f'_-(a) \rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \quad *$

$ac = a(\frac{2}{a}) = 2$

۴- به ازای چند مقدار مدمع نامنفی m ، (a, b) یک نقطه گوشه ای برای منحنی $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b+(x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ است؟ $m=1$ یک مقدار

برای پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow b = b$

$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x \geq a \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}}$

- $m \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 0 \end{cases} \quad \times$
- $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases} \quad \checkmark$
- $m \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = m(x-a)^{m-1} = 0 \end{cases} \quad \times$

پرهام شریعی

۵- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^3|}$ باشد،

مقادیر $g'(-\sqrt[3]{2}) f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ و $f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ را بیابید.

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{g(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \rightarrow (f(g(x)))' = 1 \quad \checkmark$$

(۲)

۶- خط $y = -ax - 5$ در نقطه‌ای به مثل ۳ برافزاید تابع f مماس است. اگر $f'(2) - f(2) = 2$ باشد، $f(2)$ چند برابر $f'(2)$ است؟

$$f'(2) - f(2) = 2 = (-a) - (-2a - 5) = 2 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$f'(2) = -a = \frac{3}{2} \quad \sim \quad \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1 \quad \checkmark$$

$$f(2) = -2(-\frac{3}{2}) - 5 = -1$$

(۱)

برهان ضربی

۷ - فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{x}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ چقدر است؟ $(-128\sqrt{2})$

$$(f \circ g)'(\frac{5}{\sqrt{2}}) = g'(\frac{5}{\sqrt{2}}) \times f'(g(\frac{5}{\sqrt{2}}))$$

$$g(\frac{5}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{5}{\sqrt{2}})^2 - 1}} = 2 \quad / \quad g'(x) = \frac{-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{(\sqrt[3]{x^2-1})^2} \xrightarrow{x=\frac{5}{\sqrt{2}}} g'(\frac{5}{\sqrt{2}}) = -8\sqrt{2}$$

$$[x^2 + \frac{1}{x}] \xrightarrow{x=2} [4 + \frac{1}{2}] = \frac{9}{2} \rightarrow f(x) = (x^2 + \frac{1}{x})^2 + 1 = 14x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 28x$$

$$f'(2) = 56$$

$$(f \circ g)'(\frac{5}{\sqrt{2}}) = (-8\sqrt{2}) \times 56 = -448\sqrt{2} \Rightarrow \frac{-448\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4 \quad \text{برابر}$$

۸ - تابع f مشتق پذیر و با دومی تفاضل ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{5}{2}$ و $g(x) = f(x+1) + f(2x+1)$ باشد حاصل $g'(-2)$ را بیابید.

$$f'(-1) = f'(2) = \frac{5}{2}$$

$$g'(x) = f'(x+1) + 2f'(2x+1)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 2f'(2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{5}{2} = 10$$

پڑھام مشرعی

9- آئر

$$f(n) = (n-4)\sqrt[n]{n+3}$$

بائیں حاصل میرا بائیں

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a-h) - 3f(a-h) + 2}{h(a-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a-h)-2)(f(a-h)-1)}{h(a-h)}$$

$$\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-2}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-1}{(a-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} \times \frac{f(a)-1}{a}$$

$$\rightarrow -f'(a) \times \frac{2-1}{a} = \frac{-2a}{15} \times \frac{1}{a} = -\frac{2}{15}$$

$$f'(x) = \sqrt[n]{x+3} + \frac{1}{3\sqrt[n]{(x+3)^2}} (n-4)$$

$$f'(a) = 2 + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{2a}{15} \quad \checkmark$$

لا ہول: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a-h) - 3f'(a-h) + 2}{h(a-h)} \stackrel{HOP}{=} \frac{-2f'(a-h)f'(a-h) + 2f'(a-h)}{a-2h}$

$$\rightarrow \frac{1}{a} (-2f(a)f'(a) + 2f'(a)) = \frac{1}{a} \times (-f'(a)) = -\frac{1}{a} \times \frac{2a}{15} = -\frac{2}{15} \quad \checkmark$$

خط مماس $y = x^2 - 4x + 5$

عمود است $y - 2x = 1$

1. کدام نقطه از منحنی

منحنی، بر

یاب خط $y - 2x = 1$ برابر $\frac{1}{2}$ است پس یاب خط عمود بر آن 2- است چون یاب خط عمود

قرینه و عکس هم اند

$$f'(a) = -2 \rightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow x = 1, y = 2$$

نقطه (1, 2) $\checkmark$

2