

پروهام مشرعی

۱- تابع f با منطقی زیر در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر باشد، مقدار $a+b$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x} & x < 1 \\ b \sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

نقطه مشتق ناچیز: $x=1$

بررسی در $x=1$ در $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} b \sqrt[3]{x} = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} a + |x| = a+1 \end{cases} \rightarrow b = a+1$

بررسی مشتق پذیری در $x=1$ $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} a+b & x < 1 \\ b \sqrt[3]{x} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 1 \\ f'_+(1) = b \times \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{3} b \end{cases}$

$\rightarrow \frac{1}{3} b = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{1}$

$a = \frac{1}{1} \leftarrow b = a+1$

$a+b = \frac{1}{1} + \frac{3}{1} = 2$

۲- اگر $f(x) = \frac{|2x-2|}{\sqrt[3]{x}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ را بیابید.

$y = (f - 2g)(x) \Rightarrow y = \left(\frac{2|x-1|}{\sqrt[3]{x}} - 2x \cdot \frac{|x-1| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \Rightarrow y = -2\sqrt{3} x^{-\frac{1}{4}}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} y' = (-2\sqrt{3}) \times (-\frac{1}{4}) \times (x^{-\frac{1}{4}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{4}} \rightarrow g'(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مهم شریفی

۳- به ازای هر مقدار حقیقی و نامنفی a ، تابع f روی R

$$f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases} \quad \text{مستند پذیر است مقدار } a \text{ را بیابید}$$

✓ برای پیوستگی: $ab+c = \frac{1}{a} \xrightarrow{*} a(-\frac{1}{a^2}) + c = \frac{1}{a} \rightarrow -\frac{1}{a} + c = \frac{1}{a} \rightarrow c = \frac{2}{a}$

مشتق: $f'(x) = \begin{cases} b & x < a \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq a \end{cases} \rightarrow f'_+(a) = f'_-(a) \rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \quad *$

$ac = a(\frac{2}{a}) = 2$

۴- به ازای چند مقدار مدمع نامنفی m ، (a, b) یک نقطه گوشه ای برای منحنی $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b+(x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ است؟ $m=1$ یک مقدار

✓ برای پیوستگی $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow b = b$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x \geq a \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} m \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 0 \end{cases} \quad \times \\ m = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases} \quad \checkmark \\ m \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = m(x-a)^{m-1} = 0 \end{cases} \quad \times \end{cases}$$

پرهام شریعی

۵- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - |x^2|}$ باشد،

مقادیر $g'(-\sqrt[3]{2}) f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ و $f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ را بیابید.

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{g(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2 - |x^2|}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \rightarrow (f(g(x)))' = 1$$

۶- خط $y = -ax - 5$ در نقطه‌ای به مثل ۲ بر موقعا تابع f مماس است. اگر $f'(2) - f(2) = 2$ باشد، $f(2)$ چند برابر $f'(2)$ است؟

$$f'(2) - f(2) = 2 = (-a) - (-2a - 5) = 2 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$f'(2) = -a = \frac{3}{2} \quad \sim \quad \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$f(2) = -2(-\frac{3}{2}) - 5 = -1$$

برهان ضربی

۷ - فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{x}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ چقدر است؟ $(-128\sqrt{2})$

$$(f \circ g)'(\frac{5}{\sqrt{2}}) = g'(\frac{5}{\sqrt{2}}) \times f'(g(\frac{5}{\sqrt{2}}))$$

$$g(\frac{5}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{5}{\sqrt{2}})^2 - 1}} = 2 \quad / \quad g'(x) = \frac{-2x}{(\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \xrightarrow{x=\frac{5}{\sqrt{2}}} g'(\frac{5}{\sqrt{2}}) = -8\sqrt{2}$$

$$[x^2 + \frac{1}{x}] \xrightarrow{x=2} [4 + \frac{1}{2}] = \frac{9}{2} \rightarrow f(x) = (x^2 + \frac{1}{x})^2 + 1 = 14x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 28x$$

$$f'(2) = 56 \leftarrow$$

$$(f \circ g)'(\frac{5}{\sqrt{2}}) = (-8\sqrt{2}) \times 56 = -448\sqrt{2} \Rightarrow \frac{-448\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4 \text{ برابر}$$

۸ - تابع f مشتق پذیر و با دومی تفاضلی است. اگر $f'(-1) = \frac{5}{2}$

و $g(x) = f(x+1) + f(2x+1)$ باشد حاصل $g'(-2)$

۱ برابر

$$f'(-1) = f'(2) = \frac{5}{2}$$

$$g'(x) = f'(x+1) + 2f'(2x+1)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 2f'(2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{5}{2} = 10$$

پڑھام شریعی

9- اگر $f(n) = (n-4)\sqrt[3]{n+5}$ باشد، حاصل زیری کیا ہے؟

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(5-h)-2)(f(5-h)-1)}{h(5-h)}$$

$$\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h)-2}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h)-1}{(5-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h)-f(5)}{h} \times \frac{f(5)-1}{5}$$

$$\rightarrow -f'(5) \times \frac{2-1}{5} = -\frac{25}{15} \times \frac{1}{5} = -\frac{5}{15}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+5} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}(x-4)$$

$$f'(5) = 2 + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{25}{15}$$

لاہول: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} \stackrel{HOP}{=} \frac{-2f'(5-h) + 3f'(5-h) + 2f'(5-h)}{5-2h}$

$$\rightarrow \frac{1}{5} (-2f'(5) + 3f'(5)) = \frac{1}{5} (f'(5)) = -\frac{1}{5} \times \frac{25}{15} = -\frac{5}{15}$$

خط مماس $y = x^2 - 4x + 5$

عمود است $y - 2x = 1$

10- کدام نقطه از منحنی

منحنی، بر

خط $y - 2x = 1$ برابر است؟ خط عمود بر آن 2- است چون شیب خط عمود

$$f'(x) = -2 \rightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow x = 1, y = 2$$

قرینه و عکس هم اند

(1, 2) نقطه مماس