مبین شهبازی ۱۳,۲۵

سوال ۱۱ تابع $|x|$ در $x=۰$ نقطه گوشه دارد پس مشتق ناپذیر است.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) \to a+۱=b \to a-b=-۱ \rightsquigarrow a-b=-۱ \to a-\frac{۳}{۲}=-۱ \to a=\frac{۱}{۲}$$

$$f'_+(۱)=f'_-(۱) \to ۱=\frac{۲}{۳}b\times x^{-\frac{۱}{۳}} \to ۱=\frac{۲}{۳}b(۱)^{-\frac{۱}{۳}} \to b=\frac{۳}{۲}$$

$$a+b=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

ب

$$f'(x)=\left(\frac{-۲x+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}}\right)'=\frac{-۲(۱)-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(۲)}{\sqrt[۳]{x^۴}} \longrightarrow f'(۱)=\frac{-۲(۱)-\frac{۲}{۳}(۲)}{۱}=\frac{-۱۰}{۳}$$

$$f'(۱)-۲g'(۱)=\frac{-۱۰}{۳}-۲\left(\frac{-۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$f(x)=\frac{|۲x-۴|}{\sqrt[۳]{x^۲}} \quad f'(x)=\cancel{(۲x-۴)}-۲\left(x^{-\frac{۲}{۳}}\right)+-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}(۲x-۴)^{-۲} \quad f'(۱)=-۲+\frac{۴}{۳}=-\frac{۲}{۳}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$g'(x)=\cancel{(۲-x+\sqrt{۳x})}\times-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}+\left(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}\right)x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$g'(۱)=(۱+\sqrt{۳})\times-\frac{۲}{۳}+\left(-۱+\frac{\overset{\sqrt{۳}}{\cancel{۳}}}{\underset{۲}{\cancel{۲\sqrt{۳}}}}\right)۱=-\frac{۲}{۳}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}-۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$-\frac{۵}{۳}\quad\frac{-۴\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}}{۶}=\frac{-\sqrt{۳}}{۶} \longrightarrow -\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$ ✓

$$-\frac{۲}{۳}-۲\left(-\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)=-\frac{۲}{۳}+\frac{۱۰}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\boxed{\frac{۸+\sqrt{۳}}{۳}}$$

①

-۳

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{۱}{x} & x\geq a\end{cases} \quad \lim f_+(a)\overset{\lim}{=}f_-(a) \quad \lim_{x\to a^+} bx+c=\lim_{x\to a^+}\frac{۱}{x} \quad f'_+(a)=f'_-(a) \quad b=\frac{-۱}{a^۲}$$

$$\left.\begin{aligned} ba+c&=\frac{۱}{a}\\ b&=\frac{-۱}{a^۲}\end{aligned}\right] \to -\frac{۱}{a^۲}\times a+c=\frac{۱}{a} \quad c=\frac{۲}{a}$$

$$\boxed{ac \Rightarrow a\times\frac{۲}{a}=۲}$$ ✓

②

-۴

$$f(x)=\begin{cases} b & ;\ x<a \\ b+(x-a)^m & ;\ x\geq a\end{cases} \quad f'_-(a)=۰$$

$$f'_+(a)=\lim\frac{b+(x-a)^m-b}{x-a}=(x-a)^{m-۱} \Rightarrow \lim_{x\to a}(x-a)^{m-۱}\neq ۰$$

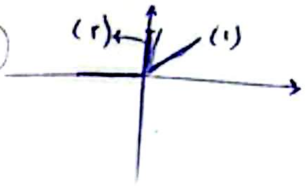
$$m=\{۰,۱\}$$

$$\text{if } \lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)^m}{x-a},\ m=۰ \to \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}^{۱}}{x-a}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$۰\leq m\leq ۱$$

~~$m=b \not> ۰$~~ ~~$m>۰$~~

$$\text{if } \lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)^m}{x-a},\ m=۱ \to \lim_{x\to a^+}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}=①$$



۲۵

$$m=۰ \to f'_-(a)=f'_+(a) \times \text{غلط}$$

$$m=۱ \to \begin{cases} f'_-(a)=۰ \\ f'_+(a)=۱\end{cases} \to f'_-(a)\neq f'_+(a)$$

یک مقدار صحیح m

۵-

$g'(x)f'(g(x)) = f(g(x)) \xrightarrow{\text{مشتق این عبارت}}$

$g(x) = \frac{1}{x^۳-|x^۳|} \longrightarrow x=-\sqrt[۳]{۲} \Rightarrow \frac{1}{(-\sqrt[۳]{۲})^۳-|-\sqrt[۳]{۲}^۳|} = \frac{1}{-۲-۲} = -\frac{1}{۴}$

۲

$fog = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{1}{x^۳-|x^۳|}-\left|\frac{1}{x^۳-|x^۳|}\right|}} = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{1}{۲x^۳}-\left|\frac{1}{۲x^۳}\right|}} = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{1}{۲x^۳}+\frac{1}{۲x^۳}}} = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۲x^۳}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

$fog = x$ $\boxed{(fog)' = 1}$ ✓

۶

$f'(۲) = -a \quad f'(۲)-f(۳) = ۲$

$f(۳) = -۳a-۵ \quad -a+۳a+۵ = ۲ \quad ۲a+۵ = ۲ \quad ۲a = -۳ \quad a = -\frac{۳}{۲}$

$f(۳) = +\frac{۳}{۲}(۳)-۵ = -\frac{1}{۲} \quad \frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{-\frac{1}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \boxed{-\frac{1}{۳}}$ ✓

$f'(۳) = -(-\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲}$

۲

۷- ۰٫۵

$(fog)' = g'(x)f'(g(x)) \rightarrow \frac{۴}{۳}\times ۱۶ = \frac{۶۴}{۳} \quad \frac{\cancel{\frac{۶۴}{۳}}\ 1}{\frac{-۱۲۸\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{1}{-۶\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۱۲}$

$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{1}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-\frac{۸}{۸}}} = ②$ ✓

$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-1)^{۲}}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}$

$f'(۲) = ۲\times ۲\left[\frac{۴+\frac{1}{۲}}{۴}\right] = ۱۶$

(جواب کامل پایین صفحه)

۸-

$T=۵ \quad g(x) = f(x+1)+f(۳x+۱۰) \quad g'(x) = f'(x+1)+۳f'(۳x+۱۰)$

$f'(-1) = \frac{۳}{۲} \quad g'(-۲) = ؟ \quad g'(-۲) = f'(-1)+۳f'(۴) \rightarrow ۴\times\frac{۳}{۲} = ۶$ ✓

$۴f'(-1)$

$f'(-1) = f'(۴)$

$f(-1) = f(۴)$

۲

۹_

$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \qquad f(۵) = ۲$

۱٫۷۵

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^{۲}(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \frac{(f(۵-h)-۲)(f(۵-h)-۱)}{h(۵-h)} = \overset{f'(۵)}{\frac{\cancel{f(۵-h)-۲}}{h}} \times \overset{f(۵)}{\frac{\cancel{f(۵-h)}-۱}{\underset{۵}{\cancel{۵-h}}}} = \frac{۱}{۵} \times f'(۵)$$

$$f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^{۲}}} \xrightarrow{x=۵} ۲ + ۱/۱۲ = ۲۵/۱۲ \qquad \boxed{-\frac{۱}{۵} \times \frac{۲۵}{۱۲} = -۵/۱۲}$$

۱۰_

۰٫۵

$۴y - ۳x = ۱ \qquad y_۱ = x^۲ - ۴x + ۵ \qquad y'_۱ = ۲x - ۴$ ✓

$y = \frac{۳x+۱}{۴} \qquad m = ۱/۲ \qquad ۲x - ۴ = ۱/۲ \qquad ۲x = ۵/۲ \qquad \boxed{x = ۵/۴}$

$۴y - ۳x = ۱ \longrightarrow$ شیب خط $= ۱/۲ \longrightarrow$ شیب خط مماس $= -۲$

$y' = ۲x - ۴ = -۲ \longrightarrow x = ۱ \;,\; y = ۲ \longrightarrow$ نقطه $(۱,۲)$

CamScanner

سوال ۷

$$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x)\, f'(g(x)) \xrightarrow{x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}} y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'\Big(\underbrace{g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right)}_{۲}\Big) \longrightarrow y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'(۲)$$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}} = (x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = -\frac{۲}{۳}x(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{\sqrt{۸}}\left(\frac{۱}{۸}\right)^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{-۲}{\sqrt{۸}} \times ۲^۴ = -\frac{۲^۵ \times \sqrt{۲}}{۲^۲} = -۲^۳\sqrt{۲} \longrightarrow g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = -۸\sqrt{۲}$$

$$f(x) = ۱۶x^۲+۱ \longrightarrow f'(x) = ۳۲x \longrightarrow f'(۲) = ۶۴$$

$$y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'(۲) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = ۴ \times (-۱۲۸\sqrt{۲}) \longrightarrow$$ ۴ برابر