باسمه تعالی ۱۸

نیلی ۲۳ — حسابان [illegible] سری A

۱- $f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^۲} & x<۱ \\ b\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq ۱\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} a+|x| & x<۱ \\ b\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq ۱\end{cases}$

$a+۱=b,\ a-b=-۱ \Rightarrow b=\frac{۳}{۲},\ a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -۱ & x<۰ \\ ۱ & ۰<x<۱ \\ \frac{۲b}{۳\sqrt[۳]{x}} & x\geq ۱\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} a-x & x<۰ \\ a+x & ۰\leq x<۱ \\ b\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq ۱\end{cases} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۲b}{۳} \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow a+b=۲$ ✓ ④

۲- $f(x)=\frac{|۲x-۴|}{\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۴-۲x}{\sqrt[۳]{x^۲}} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=-۲\cdot\sqrt[۳]{x^۲}-(۴-x^۲)\cdot\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}$

$\Rightarrow x=۱ \Rightarrow f'(۱)=-\frac{۱۰}{۳},\ g(x)=\frac{(۲-x)+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow g'(x)=$

$$\frac{\left(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right)-\left(۲-x+\sqrt{۳x}\right)\left(\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}\right)}{\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲}=\frac{-۱۰-\sqrt{۳}}{۶}$$

④

$\Rightarrow -\frac{۱۰}{۳}+\frac{۱۰+\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ✓

۳- $f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{۱}{x} & x\geq a\end{cases} \quad x=a \Rightarrow ab+c=\frac{۱}{a}$

$\Rightarrow -\frac{۱}{x^۲}=b \Rightarrow b=-\frac{۱}{a^۲}$ ④

$\Rightarrow -\frac{۱}{a}+c=,\ \frac{۲}{a}=c \Rightarrow ac=۲$ ✓

۴- $f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq ۰\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ m(x-a)^{\enclose{circle}{m-۱}} & x\geq ۰\end{cases}$

$m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$

فقط به ازای $m=۱$ تابع نقطه گوشه دارد ✓ ④

D S

۵- $g'(-\sqrt[3]{2})\, f'(g(-\sqrt[3]{2})) = (f\circ g)'(-\sqrt[3]{2})$

$\Rightarrow x = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} \Rightarrow f\circ g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2}{2x^4}}} = x$

$\Rightarrow (f\circ g)' = (x)' = \underline{1} \Rightarrow x' = \underline{1}$ ✓ ۲

$f(3) = -3a - 5 \,,\; f'(3) = -a \Longrightarrow f(3)' - f(3) = -a + 3a + 5 - 6$

$= 2 \Rightarrow \underline{a = -\frac{3}{2}} \Rightarrow f(3) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{f(3)}{f(3)'} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$ ✓ ۲

$, f'(3) = \frac{3}{2}$

۷- ۰

$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) \xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}} y' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) f'(\underbrace{g(\frac{3}{\sqrt{8}})}_{2}) \rightarrow y' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) f'(2)$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = -\frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$ $\qquad f(x) = 16x^2+1 \rightarrow f'(x) = 32x \rightarrow \underline{f'(2) = 64}$

$g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{-2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{8}} (\frac{1}{8})^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{8}} \times 2^4 = -\frac{2^5 \times \sqrt{2}}{2^2} = -2^3\sqrt{2} \rightarrow \underline{g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -8\sqrt{2}}$ $\qquad y' = g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = 4 \times (-128\sqrt{2}) \rightarrow$ ۴ برابر

۸- $g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \qquad g'(x) = f(x+1)' + 3f(3x+10)'$ ۲

$\Rightarrow g(-2)' = f(-1)' + 3f(4)' \Rightarrow g(-2)' = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\lim \frac{(f(5-h))^2 - 4f(5-h) + 4}{5h - h^2} \overset{HôP}{=} \frac{2(-f(5-h))f(5-h) + 4f'(5-h)}{5 - 2h}$

$= \frac{f'(5)}{5} = \frac{-\frac{25}{12}}{5} = -\frac{5}{12}$ ✓ ۲

۱۰- $6y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow m' = -2$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 5)' = -2 \longrightarrow 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Rightarrow (1, 2)$ ✓ ۲