آرارزادنیا — تکلیف شماره ۲۲ — کلاس دوازدهم تیزگروه A

①

$$f(x)\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x)\begin{cases} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2}} & ; x<1 \\ b\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}} & ; x\geq 1 \end{cases}$$

① نقطه مرزی برای پیوستگی $\Rightarrow a+1=b$

② نقطه مرزی برای مشتق پذیری $\Rightarrow 1=b\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\Rightarrow \frac{2b}{3}=1 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$a+1=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$\Big\}\ a+b=2$

---

②

در نقطه 1

$$f(x)=\frac{\overbrace{|2x-4|}^{4-2x}}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left((\sqrt[3]{x^2})(-2)-(-2x+4)\left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{(1)(-2)-(+2)\left(\frac{2}{3}\right)}{1}=-2-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|2-x|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow (x)=\frac{(\sqrt[3]{x^2})\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}}\right)-(2-x+\sqrt{3x})\left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\Rightarrow g'(1)=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\sqrt{3}=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right) \Rightarrow 2g'(1)=-(\sqrt{3}+4)$$

$$f'(1)-2g'(1)=-\frac{10}{3}+\sqrt{3}+4=\sqrt{3}+\frac{2}{3}$$

---

③

$$f(x)\begin{cases} bx+c & ; x<a \\ \dfrac{1}{x} & ; x\geq a \end{cases}$$

نقطه مرزی a

مشتق پذیر $\Rightarrow$ پیوسته $\Rightarrow ab+c=\dfrac{1}{a} \Rightarrow a^2b+ac=1$

$$ac=1-a^2b$$

$$f'_-(a)=f'_+(a) \Rightarrow b=\frac{-1}{a^2} \Rightarrow ba^2=-1$$

$$ac=1-(-1) \Rightarrow ac=2$$

④

$$f(x)\begin{cases} b & ;x<a \\ b+(x-a)^{m} & ;x\geq a \end{cases} \Rightarrow f'(x)\begin{cases} ۰ & ;x<a \\ m(x-a)^{m-1} & ;x\geq a \end{cases}$$

---

⑤

$$g'(x)\,f'(g(x))=(fog(x))' \Rightarrow g'(-\sqrt[۳]{۲})\,f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))=(fog(-\sqrt[۳]{۲}))'$$

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}} \text{ و } g(x)=\frac{۱}{x^{۳}-|x^{۳}|} \Rightarrow fog=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\underbrace{\frac{۱}{x^{۳}-|x^{۳}|}}_{\frac{۱}{۲x^{۳}}}-\underbrace{\left|\frac{۱}{x^{۳}-|x^{۳}|}\right|}_{\frac{-۱}{۲x^{۳}}}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x$$

x باید کوچکتر از صفر باشد پس قدرمطلق ها را حذف می کنیم

$$fog(x)=x \Rightarrow (fog(x))'=۱ \Rightarrow (fog(-\sqrt[۳]{۲}))'=۱$$

---

⑥

① $h(x)=-ax-۵ \Rightarrow h(۳)=-۳a-۵$ و $h'(x)=-a \Rightarrow h'(۳)=-a$

② $h(x)$ و $f(x)$ در نقطه ۳ مماس هستند $\Rightarrow f(۳)=h(۳)$ و $f'(۳)=g'(۳)$

$$\Rightarrow f'(۳)-f(۳)=۲ \Rightarrow h'(۳)-h(۳)=۲ \Rightarrow -a+۳a+۵=۲ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{f(۳)}{f'(۳)}=\frac{h(۳)}{h'(۳)}=\frac{-۳a-۵}{-a}=\frac{۳a+۵}{a}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{-۳}{۲}}=-\frac{۱}{۳}$$

$(f\circ g(x))' = g'(x)\, f'(g(x)) \Rightarrow (f\circ g)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\, f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$ ⑦

① $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}} \Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}=\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}} \Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-۸\sqrt{۲}$

② $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=۲$ ③ ۲ (در مسئله) $f(x)=۱۶x^۲+۱ \Rightarrow f'(x)=۳۲x \Rightarrow f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))=۶۴$

$\frac{'(x)\, f'(g(x))}{-۱۲۸\sqrt{۲}}=\frac{\cancel{-۸\sqrt{۲}}\times\cancel{۶۴}}{\cancel{-۱۲۸\sqrt{۲}}_{۲}}=۴$

$g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰) \Rightarrow g'(x)=f'(x+۱)+f'(۳x+۱۰)$ ⑧

$\Rightarrow g'(-۲)=f'(-۱)+f'(۴)$ و $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}=f'(۴)$: دوره تناوب تابع ۵ است پس
$\Rightarrow g'(-۲)=۲f'(-۱)=۲(\frac{۳}{۲})=۳$ $f(x)=f(x+۵)$

$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)} \Rightarrow \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$ ⑨

$=-f'(۵)\frac{f(۵)-۱}{۵} \xrightarrow{①} f(۵)=۲$

$\xrightarrow{②} f'(۵)=\sqrt[۳]{x+۳}+(\frac{۱}{۳}(x+۳)^{-\frac{۲}{۳}}(x-۴))=۲+\frac{۱}{۱۲}$ $=\frac{۲۵}{۱۲}$

$\Rightarrow -f'(۵)\frac{f(۵)-۱}{۵}=-\frac{۲۵}{۱۲}\times\frac{۱}{۵}=-\frac{۵}{۱۲}$

① $۹y-۳x=۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۹} \xrightarrow{\text{شیب عمود}}$ شیب $=-۳$ ⑩

② $y=x^۲-۴x+۵ \Rightarrow y'=۲x-۴$ ①,② $۲x-۴=-۲ \Rightarrow x=۱$

$\xrightarrow{x=۱} ۱-۴+۵=۲$ نقطه مورد نظر $=\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$