

A ۱۵

ساخته برای

۲۲ و ۲۳

(۱) تابع f در نقطه $x=0$ یک مماس عمود بر محور Ox دارد. پس $b=0$ و $a+1=0 \Rightarrow a=-1$
 $f(x) = \begin{cases} a+1 & ; x < 1 \\ b\sqrt{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$ زیرا در این نقطه مشتق تابع برابر است. پس در یک نقطه مشتق پذیر و پیوسته است.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b\sqrt{x} \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow 1^+} a+1 = a+1 \Rightarrow b=a+1$$

چون تابع پیوسته است پس در آن از تابع مشتق گرفته کرد

$$f'(1) = f'_-(1) \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 1 \\ \frac{b}{2\sqrt{x}} & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{b}{2\sqrt{1}} \Rightarrow b = \frac{2}{1} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a+b = -1$$

۲) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ پس $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$(f-g)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$(f-g)'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) = 0$$

۳) $f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{a} = b+a+c$ چون در $x=a$ مشتق پذیر است پس پیوسته نیز هست.

II) $f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow -\frac{1}{a^2} = b \Rightarrow -\frac{1}{a^2} = ab$

$$f'(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x \geq a \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{a} \Rightarrow ac = 1$$

۴) $f(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ b + (x-a)^m & ; x \geq a \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ m(x-a)^{m-1} & ; x \geq a \end{cases}$

$$f'_-(a) \neq f'_+(a) \Rightarrow$$

و واضح است که برای $m=1$ حاصل $m(x-a)^{m-1}$ صفری در $x=a$ و حاصل نمی‌شود.

به ازای $m=0$ واضح است که عبارت صفری در $x=a$ حاصل می‌شود. (که جواب)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{1^3}} = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow g'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{1^3}} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(1) - g'(1) = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\log(u) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = x \rightarrow f(g(u)) = x \rightarrow (f \circ g(u))' = 1$$

$$u = |u| = \begin{cases} 0 & u \geq 0 \\ \sqrt{x} & u < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{u - |u|} = \frac{1}{\sqrt{x}}; u < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - |u|} = \frac{1}{\sqrt{x}}; u < 0 \Rightarrow f(u) = \frac{1}{\sqrt{x}}; u < 0 \quad (1)$$

$$u = |u| = \begin{cases} 0 & u \geq 0 \\ \sqrt{x} & u < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{u - |u|} = \frac{1}{\sqrt{x}}; u < 0 \Rightarrow g(u) = \frac{1}{\sqrt{x}}; u < 0$$

$$f \circ g(u) = f(g(u)) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{x}; u < 0, (f \circ g)'(u) = g'(u) \times f'(g(u))$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(u) = -\frac{1}{\sqrt{x}^2 u^2}; u < 0 \Rightarrow g'(-\sqrt{x}) \times f'(g(-\sqrt{x})) = -\frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= g(x) \Rightarrow f(x) = -x^2 - a \\ f'(x) &= g'(x) \Rightarrow f'(x) = -a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) - f(x) &= x \\ -a - (-x^2 - a) &= x \\ x^2 + a = x \Rightarrow x^2 - x + a = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 - a = -\frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{x}{x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x^2}} = -\frac{1}{x}$$

$$f(u) = \left(\frac{u}{u^2 + \frac{1}{x}} \right)^2 + 1, g(u) = \frac{1}{u^2 - 1}$$

$$(f \circ g)'(u) = g'(u) \times f'(g(u))$$

$$\Rightarrow f'(u) = 2 \left(\frac{u}{u^2 + \frac{1}{x}} \right) \left(\frac{1 \times [u^2 + \frac{1}{x}] + 0 \times u}{(u^2 + \frac{1}{x})^2} \right) = \frac{2u}{(u^2 + \frac{1}{x})^2}, g'(u) = -\frac{2u}{u^2(u^2 - 1)^2}$$

$$u = \frac{x}{\sqrt{x}} \Rightarrow u^2 = \frac{x}{\sqrt{x}} \Rightarrow u^2 - 1 = \frac{x}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$g\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(f \circ g)' \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right) = g' \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right) \times f' \left(g \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right) \right) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = -\frac{2}{x - \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow g'(u) = f'(u+1) + 3f'(3u+10) \Rightarrow g'(-2) = f'(-1) + 3f'(7)$$

$$T = 0 \Rightarrow f(u+0) = f(u) \Rightarrow f'(u+0) = f'(u) \Rightarrow f'(1) = f'(-1)$$

$$g'(-2) = f'(-1) = f' \times \frac{x}{x} = 9$$

$$f(n) = (n-1)\sqrt{n+1} \rightarrow f'(n) = 1(\sqrt{n+1}) + \frac{1}{2\sqrt{n+1}}(n-1)$$

$$\Rightarrow f(a) = 2, f'(a) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

9

1.75

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a)}{h(a-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h)-1)(f(a+h)-2)}{h(a-h)} = \frac{1}{a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-2}{h} = \frac{1}{a} f'(a)$$

$$= \frac{25}{12}$$

$$f(n) = n^2 - f(n+1) \Rightarrow f'(n) = 2n-1 \quad \text{و} \quad y - 2n = 1 \Rightarrow y = 2n+1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

مشتق می‌گیریم

10

$$f'(n) = 2 \Rightarrow 2n-1 = 2 \quad \text{چون خطی برای به خطی نمودار می‌کشیم و معکوس می‌کنیم یعنی} \quad 2n-1 = 2$$

$$\Rightarrow 2n = 3 \Rightarrow n = 1.5$$

$y=1$

1.75