**۱)** تابع f در نقطه‌ای مانند $x=0$ یک نقطه زاویه‌دار است پس ما باید a و b را طوری بیابیم که تنها در این نقطه مشتق ناپذیر است. پس در $x=1$ باید مشتق‌پذیر و پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} a+|x| & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1 \end{cases}$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow b=\lim_{x\to 1^-} a+|x| = a+1 \Rightarrow b=a+1$$

چون تابع پیوسته است می‌توان از تابع مشتق استفاده کرد

$$f'_+(1)=f'_-(1) \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -1 & ; x<0 \\ 1 & ; 0<x<1 \\ \frac{2b}{3\sqrt[3]{x}} & ; x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1=\frac{2b(1)}{3\sqrt[3]{1}} \Rightarrow b=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

---

**۲)** می‌دانیم

$(x-2)^2=x^2-4x+4$

$$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} , \quad f(x)=\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}} , \quad (f-2g)'(x)=f'(x)-2g'(x)$$

$$(f-2g)(x)=\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}-2\left(\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=-\frac{2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=-2\sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{6}}$$

$$(f-2g)'(x)=-2\sqrt{3}\left(\frac{-1}{6}\times x^{-\frac{7}{6}}\right)=-\frac{7\sqrt{3}}{3}\sqrt[6]{x} \Rightarrow (f-2g)'(x)=\boxed{-\frac{7\sqrt{3}}{3} \quad L \quad -\frac{7}{\sqrt{3}}}$$

---

**۳)** چون روی R مشتق‌پذیر است پس پیوسته نیز هست.

$$\text{I)}\ f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a}=ba+c$$

$$\text{II)}\ f'_+(a)=f'_-(a) \Rightarrow -\frac{1}{a^2}=b \overset{\times a}{\Rightarrow} -\frac{1}{a}=ab \Rightarrow \frac{1}{a}=-\frac{1}{a}+c \Rightarrow c=\frac{2}{a} \Rightarrow \boxed{ac=2}$$

$$\left( f'(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x>a \end{cases} \right)$$

---

**۴)**

$$f(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases} \rightarrow \text{پیوسته} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & ; x<a \\ m(x-a)^{m-1} & ; x>a \end{cases} \quad f(a)=b$$

می‌خواهیم مقادیر m را بیابیم که در $x=a^+$ مشتق‌ناپذیر باشد

$$f'_-(a)\neq f'_+(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\neq m(a-a)^{m-1}$$

واضح است تنها به ازای $\boxed{m=1}$ حاصل $m(0)^{m-1}$ صفر نمی‌شود زیرا $0^0$ چون حاصل [illegible] نمی‌شود

به ازای $m=0$ واضح است که عبارت صفر می‌شود و به ازای مقادیر بیشتر نیز $(0)^{m-1}$ کل عبارت را صفر می‌کند ($\boxed{\text{یک جواب}}$)

۵

$x-|x| = \begin{cases} 0 & ; x\geq 0 \\ 2x & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x-|x|} = \frac{1}{2x} ; x<0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} ; x<0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} ; x<0$

$x^3-|x^3| = \begin{cases} 0 & ; x\geq 0 \\ 2x^3 & ; x<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^3-|x^3|} = \frac{1}{2x^3} ; x<0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^3} ; x<0$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{2(2x^3)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4x^3}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{4}} ; x<0 \quad , (f\circ g)'(x) = g'(x)\times f'(g(x))$

$\Rightarrow (f\circ g)'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}\,x^2} ; x<0 \Rightarrow g'(-\sqrt[3]{2})\times f'(g(-\sqrt[3]{2})) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{4}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}$

۶

$f(3)=g(3) \Rightarrow f(3) = -3a-5$

$f'(3)=g'(3) \Rightarrow f'(3) = -a$

$\Rightarrow f'(3)-f(3) = 2$

$-a-(-3a-5) = 2$

$2a+5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

$g'(x) = -a , \quad g(x) = -ax-5$

$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = -3(-\frac{3}{2})-5 = -\frac{1}{2} \\ f'(3) = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

۷

مشتق توان

$f(x) = \Big(\underbrace{x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]}_{\text{مشتق ضرب}}\Big)^2 + 1^0 , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

می‌دانیم مشتق براکت در نقاط مشتق‌پذیر صفر است

$(f\circ g)'(x) = g'(x)\times f'(g(x))$

$\Rightarrow f'(x) = 2\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)\left(1\times\left[x^2+\frac{1}{2}\right]+0\times x\right) = 2x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]^2 , \quad g'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$

$x = \frac{3}{\sqrt{8}} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow x^2-1 = \frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-1} = \frac{1}{2}$

$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = 2 , \quad g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -\frac{2(\frac{3}{\sqrt{8}})}{3(\frac{1}{2})^4} = -\frac{2\times\cancel{3}\times 16}{3\times\sqrt{8}} = -8\sqrt{2} , \quad f'(2) = 4\left[4+\frac{1}{2}\right]^2 = 4(4)^2 = 64$

$(f\circ g)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = g'(\frac{3}{\sqrt{8}})\times f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}})) = -8\sqrt{2}\times f'(2) = -8\sqrt{2}\times 64 = 4(-128\sqrt{2})$

پس جواب $\boxed{\text{۴ برابر}}$ است!

۸

$\Rightarrow g'(x) = f'(x+1)+3f'(3x+10) \Rightarrow g'(-2) = f'(-1)+3f'(4)$

$T=5 \Rightarrow f(x+5) = f(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x) \Rightarrow f'(4) = f'(-1)$

$\Rightarrow \boxed{g'(-2) = 4f'(-1) = \frac{3}{2}}$

ARSH

9

$$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f'(x)=1\left(\sqrt[3]{x+3}\right)+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4)$$

$$\Rightarrow f(5)=2 \,,\, f'(5)=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\left(f(5-h)-1\right)}^{1}\left(f(5-h)-2\right)}{h\,(\underbrace{5-h}_{5})}=\frac{1}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-\overset{f(5)}{2}}{h}=\frac{1}{5}f'(5)$$

$$=\boxed{\frac{5}{12}}$$

10

$$f(x)=x^2-4x+5 \Rightarrow f'(x)=2x-4$$ و $$6y-3x=1 \Rightarrow 6y=3x+1 \Rightarrow y=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{شیب خط}}x+\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{عرض‌ازمبدأ}}$$

چون خط مماس بر $f$ باید به خط $y$ عمود باشد پس شیبش قرینه معکوس که یعنی $-2$ است پس

$$f'(x)=-2 \Rightarrow 2x-4=-2$$

$$\Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$