۹,۲۵

نام و نام خانوادگی ...... [illegible] ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ....

$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} \; ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} \; ; x\ge 1\end{cases}$ $a+1=b(1)\Rightarrow a+1=b\Rightarrow 1=b-a$ ۰,۵

1 $f'_+(1)=f'_-(1)\to 1=\frac{2}{3}b\times x^{-\frac{1}{3}}\to 1=\frac{2}{3}b(1)^{-\frac{1}{3}}\to b=\frac{3}{2}$ $a-b=-1\to a-\frac{3}{2}=-1\to a=\frac{1}{2}$

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$

$g'(x)=\frac{\left(-1+\frac{2}{2\sqrt{3x}}\right)\times\left(\sqrt[3]{x^2}\right)-\left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}\times\left(\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{3x}\right)\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}=\frac{-8-2\sqrt[3]{3}}{3}$

(جواب کامل پایین صفحه)

$f'(x)=\frac{\left(-2x\sqrt[3]{x^2}\right)-\left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}\times(2x-4)\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}=-2-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$ ۱

2 $f'(1)-2g'(3)=-\frac{10}{3}-2\left(\frac{-8-2\sqrt[3]{3}}{3}\right)=\frac{16+4\sqrt[3]{3}}{3}$

$f(x)=\begin{cases} bx+c \; ; x\le a \\ \frac{1}{x} \; ; x\ge a\end{cases}$ $ba+c=\frac{1}{a}\Rightarrow -\frac{1}{a^2}\times a+c=\frac{1}{a}$

$-\frac{1}{a}+c=\frac{1}{a}\Rightarrow c=\frac{2}{a}$

3 $f'(x)\xrightarrow{x<a} b$

$f'(x)\xrightarrow{x>a} x^{-1}\Rightarrow -x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$ $b=-\frac{1}{a^2}$ $ac=\cancel{a}\times\frac{2}{\cancel{a}}=2$ ۲

$f(x)=\begin{cases} b \; ; x<a \\ b+(x-a)^m \; ; x\ge a\end{cases}$ $m\ge 2\to\begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=0\end{cases}\to f'_-(a)=f'_+(a)$ غ ق ق ۰

نقطه گوشه $f\to f'_-(a)\ne f'_+(a)$

4 $m=0\to f'_-(a)=f'_+(a)$ × غ ق ق

یک مقدار صحیح m

$m=1\to\begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=1\end{cases}\to f'_-(a)\ne f'_+(a)$

$g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))=\frac{-1}{3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}\times\frac{-3\times-\sqrt[3]{2}}{2\times 8}=\frac{-3\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{\frac{1}{64}}}=\boxed{-\frac{3}{4}\times\sqrt[3]{32}}$

$g(-\sqrt[3]{2})=\frac{1}{-2-1-2|}=\frac{-1}{4}\Rightarrow g'(-\sqrt[3]{2})=\frac{1}{2x^3}=\frac{0-6x}{4x^4}=\frac{-6x}{4x^4}=-\frac{3}{8}\times-\sqrt[3]{2}$ ۱

5 $f'(-\frac{1}{4})\Rightarrow f=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\Rightarrow f'(-\frac{1}{4})=\frac{0-\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}}{\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2}=\frac{\frac{-2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^2}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}$

$fog(x)=f\left(\frac{1}{2x^3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2\times\left(\frac{1}{2x^3}\right)}}=x\to fog(x)=x\to\left(fog(x)\right)'=1$

فریبا غازی

۶

$y = -ax - ۵ \Rightarrow -a(۳) - ۵ = -۳a - ۵ = f(۳) \quad f'(۳) = -a$

$f'(۳) - f(۳) = ۲ \Rightarrow -a - (-۳a - ۵) = ۲ \Rightarrow -a + ۳a + ۵ = ۲$

$۲a + ۵ = ۲ \Rightarrow ۲a = -۳$

$a = -۱/۵$

$f'(۳) = -a = -(-۱/۵) = ۱/۵ \qquad \frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{-۰/۵}{۱/۵} = -\frac{۱}{۳}$

$f(۳) = -۳(-۱/۵) - ۵ = ۴/۵ - ۵ = ۰/۵$

۱/۷۵

۷

$fog(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \cdot f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$

۰/۵

$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸} - ۱}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$ ✓

(جواب پایین صفحه)

$f'(x) = ۶x^۵ + ۴x^۳ + x = \boxed{۲۲۶}$

۸

$g(x) = f(x+۱) + ۳f(۳x+۱۰) \Rightarrow g(-۲) = f(-۱) + ۳f(۴)$

۱/۵

$g'(-۲) = f'(-۱) + ۳f'(۴) = ۲ \times \cancel{۳}$ ۳

چون ۱- و ۴ در یک تناوب هستند مشتق آنها برابر است

$g'(-۲) = ۴f'(-۱) = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$

۹

$\lim_{h \to 0} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{۵h - h^۲}$

$f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}} \to f'(۵) = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$

$\overset{HoP}{\Longrightarrow} \lim_{h \to 0} \frac{-۲f'(۵-h)f(۵-h) + ۳f'(۵-h)}{-۲h + ۵}$ ✓ $= \frac{-۲f'(۵)f(۵) + ۳f'(۵)}{۵} = \frac{-۲ \times \frac{۹}{۴} \times ۲ + ۳ \times \frac{۹}{۴}}{۵} = \cancel{-\frac{۹}{۲۰}}$

$-\frac{۵}{۱۲}$

۱

$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \Rightarrow f(۵) = ۱\sqrt[۳]{۵+۳} = ۲ \quad f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{(x-۴)}{\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}} = \sqrt[۳]{۸} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{۶۴}} = ۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$

$f(۵) = ۲$ ✓

۱۰

$۶y - ۳x = ۱ \Rightarrow ۶y = ۱ + ۳x \Rightarrow y = ۱/۵x + ۰/۵$

۰

$۲x - ۴ = ۱/۵x + ۰/۵ \Rightarrow ۰/۵x = ۴/۵$

$\boxed{x = ۹}$

$۶y - ۳x = ۱ \longrightarrow$ شیب خط $= \frac{۱}{۲} \longrightarrow$ شیب خط مماس $= -۲$

$y' = ۲x - ۴ = -۲ \longrightarrow x = ۱ \;,\; y = ۲ \longrightarrow$ نقطه $(۱, ۲)$

سوال ۲)

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}\xrightarrow{x=1}\frac{(-x+2)+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g'(x)=\frac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}}\right)(1)-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}\rightarrow g'(1)=\frac{\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{1}=-\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1)-2g'(1)=\frac{-10}{3}-2\left(\frac{-5}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال ۷)

$$y=f(g(x))\longrightarrow y'=g'(x)f'(g(x))\xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}}y'=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'\Big(\underbrace{g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)}_{2}\Big)\rightarrow y'=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'(2)$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\longrightarrow g'(x)=-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}\times 2x=\frac{-2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{-2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\frac{-2}{\sqrt{8}}\times 2^4=-\frac{2^5\times\sqrt{2}}{2^2}=-2^3\sqrt{2}\longrightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=-8\sqrt{2}$$

$$f(x)=16x^2+1\longrightarrow f'(x)=32x\longrightarrow f'(2)=64$$

$$y'=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'(2)=-8\sqrt{2}\times 64=4\times(-128\sqrt{2})\longrightarrow$$ ۴ برابر