۱

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ; x\le 1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\ge 1 \end{cases}$$

$$f(1)=f_+(1) \;/\; f'_-(1)=f'_+(1)$$

$$a+1=b \Downarrow \star \qquad 0+\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{b\times 2x}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}}$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}1=\frac{2b}{3}\Rightarrow 2b=3\rightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

۲

$$f'(1)-2g'(1)=\left[f(1)-2g(1)\right]'$$

دارای $x=1$ منفی است
پس قرینه می‌شود

$$2\times\sqrt{(x-2)^2}=2|x-2|$$

$$f(x)-2g(x)=\frac{|2x-4|-2\sqrt{x^2-4x+4}-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2x+4+2x-4-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{\left(\frac{-2\times 3}{2\sqrt{3x}}\times\sqrt[3]{x^2}\right)-\left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\times -2\sqrt{3x}\right)}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\xrightarrow{x=1}\frac{\left(\frac{-2\times 3}{2\sqrt{3}}\times 1\right)-\left(\frac{2}{3}\times -2\sqrt{3}\right)}{1}=\frac{-3}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۳

$$f(a)=f_+(a) \;/\; f'_-(a)=f'_+(a)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$ba+c=\frac{1}{a} \qquad b=\frac{-1}{a^2}\Rightarrow ba^2=-1\Rightarrow ba=\frac{-1}{a}\ \star$$

$$\star\Downarrow$$

$$-\frac{1}{a}+c=\frac{1}{a}\Rightarrow c=\frac{2}{a}\ \star\star \qquad a\times c\xrightarrow{\star\star}\frac{2}{a}\times a=2$$

$\lim_{a^+} f(x) = \lim_{a^-} f(x) = f(a) \Rightarrow a=b$

سه شنبه ۱۷ مهر 8 Oct 2024 ۱۴۴۶ ربیع الثانی ۴

۳

$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x \geq a \end{cases}$

$m=0 \to f'_+(a)=0$ ✗

$m=1 \quad f'_-(a)=0 \quad f'_+(a)=1$ ✓

$m \geq 2 \quad f'_-(a)=0 \quad f'_+(a)=0$ ✗

۵

$g'(x) f'(g(x)) = (f \circ g)'$

$f \circ g = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3-|x^3|} - \left|\dfrac{1}{x^3-|x^3|}\right|}} = 1$

۶

مماس $\Rightarrow f'(۳) = -a \;/\; f(۳) = -۳a-۵$

$-a + ۳a + ۵ = ۲ \Rightarrow ۲a = -۳ \to \boxed{a = -\frac{۳}{۲}}$

$\dfrac{f(۳)}{f'(۳)} = \dfrac{-۳a-۵}{-a} = \dfrac{-۳(-\frac{۳}{۲})-۵}{\frac{۳}{۲}} = \dfrac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \boxed{-\frac{۱}{۳}}$

۷

$f \circ g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) \times f'(g(\frac{\sqrt{۳}}{۸}))$

$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = ۲$

$g' \to \dfrac{\dfrac{-۲x}{۳\sqrt[3]{(x^۲-۱)^۲}}}{(\sqrt[3]{x^۲-۱})^۲} = -۸\sqrt{۲}$

$[x^۲ + \frac{۱}{۲}] \xrightarrow{x=۲} f(x) = -۱۶x^۲-۱$

$f \circ g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \dfrac{-۵۱۲\sqrt{۲}}{-۱۲۸\sqrt{۲}}$ ۴

۱۸ چهارشنبه مهر

9 Oct. 2024

۱۴۴۶ ربیع الثانی ۵

(8)

$f'(-1) = f'(4) = 1/5$

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$

$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) = 4f'(-1) = 6$

(9)

$$\lim \frac{(f(5-h))^2 - 3f(5-h) + 2}{5h - h^2} \overset{Hop}{=} \frac{2(-f'(5-h))\, f(5-h) + 3f'(5-h)}{5 - 2h}$$

$$= \frac{-2f'(5)\, f(5) + 3f'(5)}{5} = \frac{-f'(5)}{5} = -\frac{5}{12}$$

$f(5) = 2$

$f'(5) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

(10)

خط مماس بر منحنی $\Rightarrow 6y = 1 + 3x \xrightarrow{\div 6} y = \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{2}$

مشتق $= 0$

$\frac{3x+1}{6} = x^2 - \frac{4}{5}x + 5 \Rightarrow x^2 - \frac{14x}{15} + \frac{4}{5} = 0$

Δ $\frac{+4/5 \pm 1/5}{2} = 2 \quad 1/5$

عبور $\longrightarrow$ شیب = قرینه معکوس $\Rightarrow x = 2$

$x = 1 \quad y = 2$