نام و نام خانوادگی: حسام رفیع زاده — به نام خدا — مقطع: دوازدهم پسر A

شماره تکلیف: ۲۲

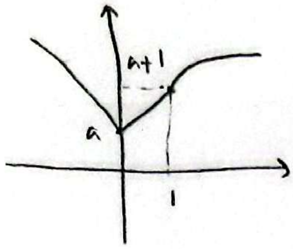
۱۷/۷۵

۱-

از لحاظ پیوستگی تابع ها در همه ی نقاط پیوسته هستند اما باید در $x=1$ بررسی شود:

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \to a+1=b \to a-b=-1$$



- با توجه به نمودار واضح است تابع در $x=0$ مشتق ناپذیر در نتیجه باید در $x=1$ مشتق پذیر باشد (طبق فرض)

$$\Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1) \to 1=\frac{2b}{3\sqrt[3]{1}} \to b=\frac{3}{2} \text{ و } a=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{a+b=2}$$

۲

۲.

$$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow[\text{① منفی}]{\text{مشتق در حوالی (1) در نتیجه}} f(x)=\frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g(x)=\frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{①} g(x)=\frac{2-x+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

۲

$$\to f'(1)-2g'(1)=[f(x)-2g(x)]' \; ; x=1 \Rightarrow \frac{4-2x-4+2x-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=\frac{\left(\frac{-3}{\sqrt{3x}}\times\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\times 2\sqrt{3x}\right)}{\sqrt[3]{x^4}} \xrightarrow{x=1} -\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

۳- شرط مشتق پذیری، پیوستگی بوده و ... ①

$$① \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x) \to ba+c=\frac{1}{a} \quad ⓐ$$

$$② \Rightarrow f'_+(a)=f'_-(a) \Rightarrow \frac{-1}{a^2}=b \quad ⓑ$$

$$\frac{-1}{a}+c=\frac{1}{a} \to c=\frac{2}{a} \to \boxed{a.c=2}$$

جواب سوال

۲

-۴

$$f(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x\geq a \end{cases} \xrightarrow{()'} f'(x)=\begin{cases} 0 & ; x<a \\ m(x-a)^{m-1}\times(1) & , x\geq a \end{cases}$$

- می دانیم اگر $m>1$ باشد مشتق تابع در نقطه‌ی a ، صفر می‌شود [باتوجه به ضابطه‌ی مشتق]

$\Rightarrow m=1 \leftarrow$ فقط

نقطه‌ی (a,b) را نقطه‌ی شکستگی می کند.

۲

-۵

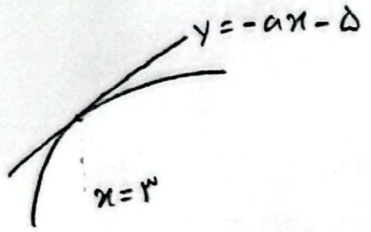
$$g'(x)f'(g(x))=(fog(x))', \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}, \quad g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$$

$$fog(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-|x^3|}-\left|\frac{1}{x^3-|x^3|}\right|}} \xrightarrow[\text{مشتق } (-\sqrt[3]{2})]{\text{برای } x<0} fog(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^3}}}=x$$

۲

$$\xrightarrow{()'} (fog(x))'=x'=\boxed{1}$$

-۶



$$f'(3)=-a$$
$$f(3)=-3a-5$$
$$\rightarrow f'(3)-f(3)=2 \rightarrow a=\frac{-3}{2}$$

$$\rightarrow y=\frac{3}{2}x-5 \quad \begin{cases} f(3)=\frac{9}{2}-5=\frac{-1}{2} \\ f'(3)=3/2 \end{cases}$$

$$\frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{\frac{-1}{2}}{3/2}=\boxed{\frac{-1}{3}}$$

۲

-۷

$$(f\circ g(x))' = f'(g(x)) + g'(x) \quad \textcircled{\small ۵}$$

$$y' = g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) f'(۲) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = ۴ \times (-۱۲۸\sqrt{۲}) \rightarrow$$ ۴ برابر

$$f'(x) = ۲\left(x[x^۲ + ۱/۲]\right) \times \left([x^۲ + ۱/۲] + ۰\right) \xrightarrow[x=۲]{۵} f'(g(x)) = ۱۶ \times ۴ = ۶۴$$

۱

$$g'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}} \xrightarrow{x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}} g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \sqrt{۸}$$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}} = (x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}} \rightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x = -\frac{۲}{۳}x(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = ۲ \quad \textcircled{\small ۵}$$

$$g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = \frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{\sqrt{۸}}\left(\frac{۱}{۸}\right)^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{-۲}{\sqrt{۸}} \times ۲^{۴} = -\frac{۲^۵ \times \sqrt{۲}}{۲^۲} = -۲^۳\sqrt{۲} \rightarrow g'\left(\frac{۳}{\sqrt{۸}}\right) = -۸\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{۵} (f\circ g(x))' = ۶۴ \times \sqrt{۸} \rightarrow$$ خواسته مسئله : $$\frac{۶۴\sqrt{۸}}{-۱۲۸\sqrt{۲}} = -\frac{۲ \times ۶۴}{۱۲۸} = -۱$$

$$\cancel{۳۲} \times ۴$$

-۸

وقتی می گوید تابع با دوره ی تناوب ۵ تکراری شود یعنی $f'(x) = f'(x+5)$ و باحتی مقدار $f(x) = f(x+5)$ ①

۱٫۵

$$g(x) = f(x+۱) + ۳f(۳x+۱۰) \xrightarrow{x=-۲} g(-۲) = f(-۱) + ۳f(۴) \xrightarrow{(۱)'} g'(-۲) = f'(-۱) + f'(۴)$$

$$\xrightarrow{f'(-۱) = f'(۴)} g'(-۲) = \cancel{۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳ \rightarrow g'(-۲) = ۳}$$

$$g'(-۲) = ۴f'(-۱) = ۶$$

-۹

$$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \xrightarrow{x=۵} f(۵) = ۲ \quad \textcircled{\small ۵}$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۲}{h} \times \lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۱}{۵-h} \xrightarrow{۵}$$

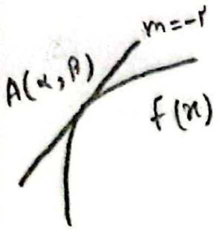
۱٫۷۵

$$-f'(۵) \times \frac{۱}{۵} \xrightarrow{۵} \frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{-۱}{۵} = -\frac{۵}{۱۲}$$ جواب

$$f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}} \times (x-۴) \xrightarrow{x=۵} ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲} \rightarrow f'(۵) = \frac{۲۵}{۱۲} \quad \textcircled{\small ۵}$$

۱۰- $4y - 2x = 1 \rightarrow 4y = 2x + 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \rightarrow m = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{بر آن}]{\text{خط عمود}} m \cdot m' = -1$

$\rightarrow m' = -2$



$f(x) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{f'} f'(x) = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = -2 \rightarrow \cancel{x = 3}$

$2x = 2$

$A(3, 2)$

$x = 1$

$y = 2$

۱٫۵