دوازدهم سپر ۲ A — شماره تکلیف ۲۲ — ۲۰ — ایلیا سالاری

۱)

$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1\end{cases}$ $\quad f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(1) \Rightarrow b=a+1 \Rightarrow a-b=-1$

$f'_+(1)=\dfrac{2b}{3\sqrt[3]{1}}=\dfrac{2b}{3}$ $\quad f'_-(1)=1$ $\quad f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow \dfrac{2b}{3}=1\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$ $\quad a+b=2$

۲

۲)

$f(x)=\dfrac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f'(1)-2g'(1)=(f-2g)'(1)$

$f(x)-2g(x)=\dfrac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}-2\left(\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\dfrac{|2x-4|-2|x-2|-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=-2\sqrt{3}\times x^{-\frac{1}{6}}\Rightarrow$

$(f-2g)'(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}x^{-\frac{7}{6}}$ $\quad (f-2g)'(1)=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}(1)^{-\frac{7}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}$

۲

۳)

$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \dfrac{1}{x} & x\geq a\end{cases}$ $\quad f(a)=\lim_{x\to a^+}f(a)=\lim_{x\to a^-}f(a)\Rightarrow \dfrac{1}{a}=ab+c$ $\quad f'_+(a)=f'_-(a)=-\dfrac{1}{x^2}=b\Rightarrow$

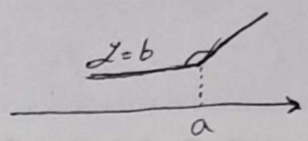
$\Rightarrow -\dfrac{1}{a^2}=b$

$a^2b+ac=1\ ,\ a^2b=-1\Rightarrow ac=2$

۲

۴)

$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 \\ m(x-a)^{m-1}\end{cases}$



به ازای یک مقدار

۲

۵)

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}\ ,\ g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x^3|}\ \xrightarrow[\text{تعریف نشده است}]{\text{درصورت مثبت بودن } x}\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x}}\ ,\ g(x)=\dfrac{1}{2x^3}$

درنتیجه x باید منفی باشد

$g'(x)f'(g(x))=(f\circ g)'(x)$ $\quad (f\circ g)(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\times\frac{1}{2x^3}}}=x$ $\quad (f\circ g)'(x)=1$

۲

۶)

$f(3)=-3a-5\Rightarrow f'(3)=-a$ $\quad f'(3)-f(3)=-a+3a+5=2\Rightarrow 2a+5=2\Rightarrow 2a=-3\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$

$f(3)=-3(-\frac{3}{2})-5=\dfrac{-1}{2}$ $\quad f'(3)=\dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{f(3)}{f'(3)}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}$

۲

۷)

$f(x)=(x[x^2+\frac{1}{2}])^2+1\ ,\ g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\quad (f\circ g)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$

$g'(x)=(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}\times(-\frac{1}{3})\times 2x\Rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{8}})=1-8\sqrt{2}$ $\quad g(\frac{3}{\sqrt{8}})=2$ $\quad f'(2)=32(2)=64$ $\quad (f\circ g)'(2)=\dfrac{64}{-128\sqrt{2}}$

۲

۸)

$g(x)=f(x+1)+f(3x+10)$ $\quad f'(-1)=\dfrac{3}{2}$ $\quad g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10)\Rightarrow g'(2)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=6$

۲

۹)

$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}\Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{x+3}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4)\Rightarrow f'(5)=2+\dfrac{1}{12}=\dfrac{25}{12}$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}=\dfrac{0}{0}\overset{hoP}{\Rightarrow}\dfrac{-2f(5-h)f'(5-h)+3f'(5-h)}{5-h-h}=\dfrac{-2f(5)f'(5)+3f'(5)}{5}=-\dfrac{5}{12}$

۲

۱۰)

$f(x)=x^2-4x+5\Rightarrow f'(x)=2x-4$ $\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\Rightarrow m=\frac{1}{2}\Rightarrow$ عمود بر منحنی $m=-2\Rightarrow f'(x)=-2$

$2x-4=-2\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1\Rightarrow y=2$

$\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}\Rightarrow(1,2)$

۲