دوازدهم پسر ۲ A — شماره تکلیف ۲۲ — ایلیا سالاری

۱

$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\ge 1\end{cases}$ $\quad f(1)=\lim_{x\to1^+} f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(1) \Rightarrow b=a+1 \Rightarrow a-b=-1$

$f'_+(1)=\dfrac{2b}{3\sqrt[3]{1}}=\dfrac{2b}{3}$ $\quad f'_-(1)=1$ $\quad f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow \dfrac{2b}{3}=1 \Rightarrow b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$ $\quad a+b=2$

۲

$f(x)=\dfrac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f'(1)-2g'(1)=(f-2g)'(1)$

$f(x)-2g(x)=\dfrac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}-2\left(\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\dfrac{|2x-4|-2|x-2|-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=-2\sqrt{3}\times x^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow$

$(f-2g)'(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}x^{-\frac{7}{6}}$ $\quad (f-2g)'(1)=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}(1)^{-\frac{7}{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}$

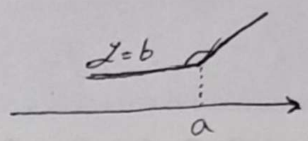
۳

$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\ge a\end{cases}$ $\quad f(a)=\lim_{x\to a^+} f(a)=\lim_{x\to a^-} f(a) \Rightarrow \dfrac{1}{a}=ab+c$ $\quad f'_+(a)=f'_-(a)=-\dfrac{1}{x^2}=b \Rightarrow -\dfrac{1}{a^2}=b$

$a^2b+ac=1\ ,\ a^2b=-1 \Rightarrow ac=2$

۴

$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\ge a\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 \\ m(x-a)^{m-1}\end{cases}$



به ازای یک مقدار

۵

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{x^3-|x|^3}$ $\xrightarrow[\text{تعریف نشده است}]{\text{در صورت مثبت بودن } x}$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x}}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{2x^3}$

در نتیجه x باید منفی باشد

$g'(x)f'(g(x))=(f\circ g)'(x)$ $\quad (f\circ g)(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\times\frac{1}{2x^3}}}=x$ $\quad (f\circ g)'(x)=1$

۶

$f(3)=-3a-5 \Rightarrow f'(3)=-a$ $\quad f'(3)-f(3)=-a+3a+5=2 \Rightarrow 2a+5=2 \Rightarrow 2a=-3 \Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$

$f(3)=-3\left(-\dfrac{3}{2}\right)-5=\dfrac{-1}{2}$ $\quad f'(3)=\dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{f(3)}{f'(3)}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}$

۷

$f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1$ ، $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\quad (f\circ g)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$

$g'(x)=(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2x \Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=1-8\sqrt{2}$ $\quad g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=2$ $\quad f'(2)=32(2)=64$ $\quad \dfrac{(f\circ g)'(2)}{-128\sqrt{2}}=4$

۸

$g(x)=f(x+1)+f(3x+10)$ $\quad f'(-1)=\dfrac{3}{2}$ $\quad g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10) \Rightarrow g'(2)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=6$

۹

$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{x+3}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}(x-4) \Rightarrow f'(5)=2+\dfrac{1}{12}=\dfrac{25}{12}$

$\lim_{h\to0}\dfrac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}=\dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{hoP}} \dfrac{-2f(5-h)f'(5-h)+3f'(5-h)}{5-h-h}=\dfrac{-2f(5)f'(5)+3f'(5)}{5}=-\dfrac{5}{12}$

۱۰

$f(x)=x^2-4x+5 \Rightarrow f'(x)=2x-4$ $\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \Rightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow m$ عمود بر منحنی $=-2 \Rightarrow f'(x)=-2$

$2x-4=-2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=2$ $\quad \begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} \Rightarrow (1,2)$