نام و نام خانوادگی: حسام رفیع زاده «به نام خدا» مقطع: دوازدهم پسر A

-۱

$$g(x)=f(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)\xrightarrow{()'} g'(x)=f'(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)\times(1+\tan^2 x+(-\sqrt{2}\sin x))$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} g'(\tfrac{\pi}{4})=f'(1+1)\times(1+\cancel{1}-\cancel{1})\Rightarrow f'(2)=g'(\tfrac{\pi}{4})\rightarrow \boxed{f'(2)=\sqrt{3}}$$

.۲

$$f(x)=\frac{8+\cos^3 x}{4-\cos^2 x}\rightarrow$$

$$g(x)=\frac{2}{2-\cos x}=\frac{4+2\cos x}{4-\cos^2 x}$$

$$\rightarrow f(x)-2g(x)=\frac{\cos^3 x+8-8-4\cos x}{4-\cos^2 x}$$

$$\rightarrow f(x)-2g(x)=\frac{\cos^3 x-4\cos x}{4-\cos^2 x}=\frac{\cos x\,\cancel{(\cos^2 x-4)}}{-\cancel{(\cos^2 x-4)}}=-\cos x\overset{()'}{\Rightarrow}\sin x$$

$$\rightarrow f'(\tfrac{7\pi}{6})-2g'(\tfrac{7\pi}{6})=\sin\tfrac{7\pi}{6}=\boxed{-\tfrac{1}{2}}$$

-۳

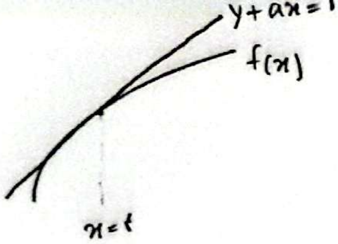
$$f(x)=|4x-3|\sqrt{ax}\rightarrow f(x)=\begin{cases}(4x-3)\sqrt{ax} & x\geq\frac{3}{4}\\ (-4x+3)\sqrt{ax} & x<\frac{3}{4}\end{cases}\xrightarrow{()'} f'(x)=\begin{cases}4\sqrt{ax}+\frac{a}{2\sqrt{ax}}\times(4x-3)\;;\; x>\frac{3}{4}\\ -4\sqrt{ax}+\frac{a}{2\sqrt{ax}}\times(-4x+3)\;;\; x<\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$f'_+(\tfrac{3}{4})=2\sqrt{3a}$$

$$f'_-(\tfrac{3}{4})=-2\sqrt{3a}$$

$$\xrightarrow{\text{اختلاف}} \cancel{4}\sqrt{3a}=\cancel{4}\sqrt{6}\rightarrow \boxed{a=2}$$

-۴



$$\xrightarrow[\text{شکل}]{\text{با توجه به}} \quad f'(4) = -a$$

$$f(4) = -4a+2 \quad \xrightarrow{+} \quad -5a+2=-1 \rightarrow -5a=-3 \rightarrow a=\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow f'(4) = \frac{-3}{5}$$

-۵

باید محل برخورد $\Delta=0$ باشد ریشه مضاعف باشد.①

$$f(x) = \frac{x+5}{7} \rightarrow \frac{ax-1}{3x+1} = \frac{x+5}{7} \rightarrow 3x^2+16x+5 = 7ax-7$$

$$\rightarrow 3x^2+16x+5-7ax+7=0 \xrightarrow{①} \Delta=0 \rightarrow (16-7a)^2-144=0 \rightarrow (16-7a)^2=144$$

$$\begin{cases} 16-7a=12 \rightarrow -7a=-4 \rightarrow a=\frac{4}{7} \\ 16-7a=-12 \rightarrow -7a=-28 \rightarrow a=4 \end{cases}$$

-۶

$$f(x)=x^3+ax-b \xrightarrow{(1)'} f'(x)=3x^2+a \xrightarrow{x=2} 12+a=0 \rightarrow a=-12$$

$$f(2)=0 \xrightarrow{a=-12} x^3-12x-b=0 \xrightarrow{x=2} 8-24-b=0 \rightarrow b=-16$$

$$b-a=-4$$

-۷

$$f(x)=\sin^n(x^2), \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x).f'(x)}{(1-\cos x)^m}=32\sqrt{2}, \quad f'(x)=n\sin^{n-1}(x^2)\times\cos(x^2)\times 2x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x).f'(x)}{(1-\cos x)^m} \underset{\text{هم ارزی}}{\sim} \frac{2^m\times x^{2n}\times n\times x^{2n-2}\times 2x\times\cos(x^2)}{x^{2m}} \cdot \frac{}{1} = \frac{2^{m+1}\times x^{4n-1}\times n}{\cancel{x^{2m}}} = 32\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow[\text{طور شده}]{\text{چون}} \quad 4n-1=2m \rightarrow 2n-\frac{1}{2}=m \quad ① \qquad 2^{m+1}\times n=32\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{①} \quad 2^{2n+\frac{1}{2}}\times n=32\sqrt{2} \rightarrow n=2, \; m=\frac{7}{2} \rightarrow 2m+n=9$$

-۸

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$, $(f^{-۱}(۲))'=?$ / $f'(x)=\dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}-۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)^۲}$ ①

$f(x)=۲ \rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}=۲ \rightarrow x=۹ \overset{①}{\Rightarrow} f'(۹)=\dfrac{-۱}{۱۲} \Rightarrow (f^{-۱}(۲))'=\dfrac{۱}{f'(۹)}$

$\rightarrow \boxed{(f^{-۱}(۲))'=-۱۲}$

-۹

$\text{آهنگ متوسط}=\dfrac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)} \rightarrow \text{آهنگ متوسط}=۱+۸a-۸=-۱۱ \rightarrow a=\dfrac{-۱}{۲}$

$\text{خواسته مسئله}: f'(۱)=?$, $f'(x)=۳(x^۲+۱)^۲\times ۲x\times(\frac{-۱}{۲}x+۱)+\frac{-۱}{۲}\times(x^۲+۱)^۳$

$\rightarrow \boxed{f'(۱)=۸}$

-۱۰

$f(x)=\sin x \cdot \cos ۲x$

$g(x)=\sin^۴ x-\cos^۴ x$

$\text{آهنگ متوسط } f(x)=\dfrac{f(\frac{\pi}{۲})-f(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۴}}=\dfrac{-۴}{\pi}$

$\rightarrow \dfrac{\text{آهنگ } f}{\text{آهنگ } g}=\boxed{-۱}$

$\text{آهنگ متوسط } g(x)=\dfrac{g(\frac{\pi}{۲})-g(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۴}}=\dfrac{۱-۰}{\frac{\pi}{۴}}=\dfrac{۴}{\pi}$