ماهان نجفی

(۱) شیب خط مماس همان مشتق تابع در نقطه مماس است بنابراین داریم: $m = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$

(۲) ابتدا معادله خط مماس را می‌نویسیم: $m = \frac{1}{3} \Rightarrow d: y = \frac{x+4}{3}$

اکنون فرض می‌کنیم تابع در نقطه $A(m, \frac{m+4}{3})$ بر نمودار f مماس است در نتیجه داریم:

$$\frac{m+4}{3} = \sqrt{am-1} \to m^2+8m+16 = 9am-9$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{2\sqrt{am-1}} \to \frac{4}{9} = \frac{a^2}{am-1} \to 4am-4 = 9a^2 \xrightarrow{\times 9/4} 9am-9 = \frac{81a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{81}{4}a^2 = (m+4)^2 \Rightarrow \frac{9}{2}a = m+4 \to m = \frac{9}{2}a-4 \to 4a(\frac{9}{2}a-4)-4 = 9a^2$$

$$\to 18a^2-16a-4 = 9a^2 \Rightarrow 9a^2-16a-4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2/9 \end{cases}$$

چون شیب خط مورد نظر مثبت پس a حتماً باید مثبت باشد بنابراین مقدار $a=2$ آن قابل قبول است

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{2\times5-1} = \boxed{3}$$

(۳) $y_1 = \frac{x^2+mx+1}{x+3}, \quad y_2 = \frac{3x+n}{4}$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{4} = \frac{n+3}{4} \Rightarrow m+2 = n+3$$

$$y_1' = \frac{(2x+m)(x+3)-(x^2+mx+1)(1)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2} \Rightarrow \frac{3m+6}{16}$$

$$y_2' = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3m+6}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow m+2 = 4 \Rightarrow \boxed{m=2}, \boxed{n=1} \Rightarrow m+n = \boxed{3}$$

(۴) $3g'(\frac{5\pi}{3}) - f'(\frac{5\pi}{3}) = (3g-f)'(\frac{5\pi}{3})$

$$3g(x) = \frac{9}{3+\sin x} \times \frac{3-\sin x}{3-\sin x} = \frac{27-9\sin x}{9-\sin^2 x} = 3g(x)$$

$$\to (3g-f)(x) = \frac{27-9\sin x+\sin^3 x-27}{9-\sin^2 x} = \frac{\sin^3 x-9\sin x}{9-\sin^2 x} = \frac{\sin x(\sin^2 x-9)}{-(\sin^2 x-9)} = -\sin x$$

$$(3g-f)(x) = -\sin x \Rightarrow (3g-f)'(x) = -\cos x \to -\cos\frac{5\pi}{3} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

ماهان کلینی

۵) هر دو تابع g و f برای مقادیر مثبت تعریف می‌شوند $g'(\sqrt[5]{3})\, f'(g(\sqrt[5]{3})) = (f\circ g)'(\sqrt[5]{3})$

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x^5}\right) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}} = -x \Rightarrow \boxed{(f\circ g)'(x) = -1}$$

۶) از هم ارزی استفاده می‌کنیم: $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = x\times g(x)+1 = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \Rightarrow xg(x) = \frac{x^2-2x+1-x^2-2x-1}{x^2+2x+1}$$

$$= xg(x) = \frac{-4x}{(x+1)^2} \Rightarrow g(x) = \frac{-4}{(x+1)} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = -4}$$

۷) ابتدا ضابطه‌ی تابع قرینه نسبت به محور xها را می‌نویسیم: $y\to -y \Rightarrow y = -x^2-1$

$$d: y = a \Rightarrow -x^2-1 = a\ (a<0) \Rightarrow x^2 = -a-1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-a-1}$$

$$y' = 2x \to \begin{cases} 2\sqrt{-a-1} \\ -2\sqrt{-a-1} \end{cases} \Rightarrow -4(-a-1) = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{4}}$$

۸) فرض می‌کنیم در نقطه‌ی $x=\alpha$ این خط بر تابع f مماس است در نتیجه داریم: $d: y = mx$

$$m\alpha = 2\sqrt{\alpha}\,(4\alpha^2+3) \Rightarrow m\sqrt{\alpha} = 8\alpha^2+6$$

مشتق‌های آن‌ها نیز باهم برابر است: $m = 2\times\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(4\alpha^2+3) + (2\sqrt{\alpha})(8\alpha) = \frac{4\alpha^2+3}{\sqrt{\alpha}} + 16\alpha\sqrt{\alpha}$

$$\xrightarrow{\times\sqrt{\alpha}} m\sqrt{\alpha} = 4\alpha^2+3+16\alpha^2 = 20\alpha^2+3 \Rightarrow 20\alpha^2+3 = 8\alpha^2+6$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\alpha>0} \alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow m\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \Rightarrow \boxed{m = 8\sqrt{2}}$$

ماکان نجفی

(۹) فرض می‌کنیم این خط در نقطهٔ $x=\alpha$ بر نمودار تابع f مماس است در نتیجه داریم: $d: mx$

$$m\alpha = \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^2+\alpha+1} \Rightarrow -2\alpha^2+\alpha+1 = \frac{1}{m\sqrt{\alpha}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-2x^2+x+1) - (\sqrt{x})(-4x+1)}{(-2x+x+1)^2}$$

از طرفی مشتق که برابری شیب دارند در نتیجه داریم:

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(-2\alpha^2+\alpha+1) - (\sqrt{\alpha})(-4\alpha+1)}{(-2\alpha^2+\alpha+1)^2} = m \rightarrow m\sqrt{\alpha} = \frac{\frac{1}{2}(-2\alpha^2+\alpha+1) - (\alpha)(-4\alpha+1)}{(-2\alpha^2+\alpha+1)^2} = \frac{1}{-2\alpha^2+\alpha+1}$$

$$\rightarrow -\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} + 4\alpha^2 - \alpha = -2\alpha^2+\alpha+1 \Rightarrow 5\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 10\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\alpha>0} \begin{cases} \alpha = -2 \quad \text{غ ق ق} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(۱۰)

$$(f\circ g)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}(2^{-2})^{-\frac{3}{2}} = -4\sqrt{5} = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \Rightarrow f'(x) = 3([x])(x[x])^2 = 3(2)(\overset{4}{2\times 2})^2 = 96$$

$$\Rightarrow (f\circ g)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 96(-4\sqrt{5}) \Rightarrow -\frac{96\times 4\sqrt{5}}{48\sqrt{5}} = \boxed{-8}$$