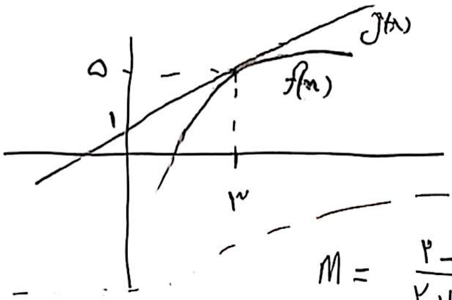
اسماعیل کیوان مرد

۵/۷۵

۱-



$g(x)=\frac{4}{3}x+1$, $f'(3)=g'(3)$ = $\frac{4}{3}$ ۲

۲-

$m=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \Rightarrow g'(x)=f'(x) \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{a}{2\sqrt{ax-1}} \Rightarrow a>0$

خط مماس $= g(x) \Rightarrow$ و $\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=\sqrt{ax-1}$ $\Delta=0$

$\Rightarrow x+4=3\sqrt{ax-1} \Rightarrow x^2+8x+16=9ax-9 \Rightarrow x^2+(8-9a)x+25=0$ ۲

$(8-9a)^2-100=0 \Rightarrow 8-9a=\pm10 \Rightarrow -9a=-18 \Rightarrow a=2$ ($a>0$) $\Delta=0$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5)=3$ ✓

۳-

(جواب پایین صفحه) ۰

$f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+3}$, $g(x)=\frac{3}{4}x+\frac{n}{4}$ $\Rightarrow f'(1)=g'(1) \Rightarrow \frac{(2x+m)(x+3)-1(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}=\frac{8+4m-2-m}{16}=\frac{3}{4}$; $\frac{m-2}{4}=6 \Rightarrow m=6$ ($m-2$, $3m-6$)

$f(1)=g(1) \Rightarrow \frac{3}{4}+\frac{n}{4}=\frac{8}{4} \Rightarrow \frac{n}{4}=\frac{5}{4} \Rightarrow n=5$

۴-

$f(x)=\frac{27-\sin^3x}{9-\sin^2x}=\frac{(3-\sin x)(9+3\sin x+\sin^2x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}=\frac{\sin^2x+3\sin x+9}{\sin x+3}$ ۱/۷۵

$(3g(x)-f(x))'=3g'(x)-f'(x) \Rightarrow \frac{9-\sin^2x-3\sin x-9}{3+\sin x}=\frac{-\sin^2x-3\sin x}{3+\sin x}=-\sin x$

$\Rightarrow h'(\frac{5\pi}{6})=-\cos(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}$ $(3g-f)'(\frac{5\pi}{3})=-\cos(\frac{5\pi}{3})=\frac{-1}{2}$

۵-

$f=g^{-1}(x)$, $x\geq0$; $f\circ g(x)=-x$ ، $x<0$ تعریف نشده $\Rightarrow (f(g(x)))'=-1 \Rightarrow f'(g(\sqrt{4}))=-1$ ✓

۶-

$f'(x)=g(x)+g'(x)x \Rightarrow f'(0)=g(0)$, $h'(0)=2(\frac{\sin x-1}{\sin x+1})(\frac{\cos x(\sin x+1)-(\cos x)(\sin x-1)}{(\sin x+1)^2})$ ۲

$\Rightarrow f'(0)=-4 \Rightarrow g(0)=-4$ $2(-1)\times2=-4$

شیب ها باید قرینه و معکوس باشند / طول ها قرینه باشند

۷-

$y=x^2+1$ $\xrightarrow{\text{قرینه}}$ $y=-x^2-1 \Rightarrow y'=-2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$; $y_1' \to -1$, $y_2' \to +1$ $\Rightarrow x=+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ مماس ها برهم عمودند

$f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{4} \Rightarrow d \Rightarrow y=-\frac{5}{4}$ ✓ ۲

۹- ۵

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(4x^2+3) + (8x)(2\sqrt{x}) = 1$

تابع در $x=0$ مماس قائم دارد

پس شیب برای خط L تعریف نمی‌شود

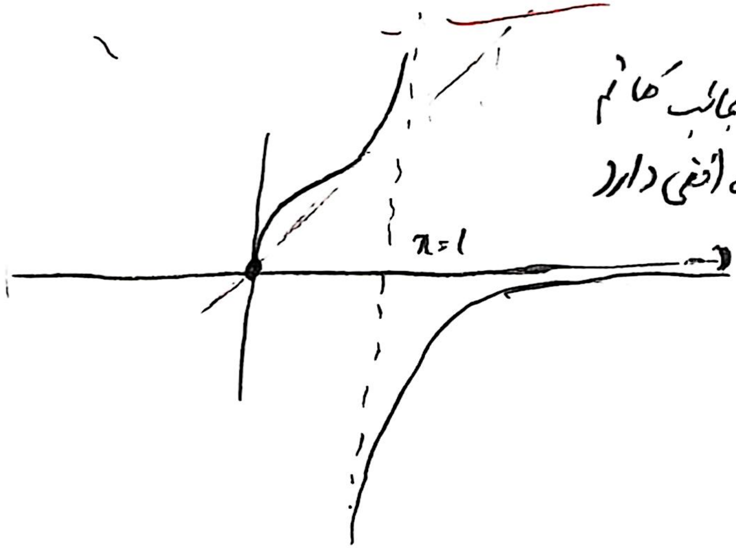
چون خط L از مبدأ می‌گذرد پس نقطه تماس آنها همان مبدأ است

(جواب پایین صفحه)

۱۰- ۵

فرض نقطه A در = برابر صفرات

تابع در $x=1$ مجانب قائم و در $y=0$ مجانب افقی دارد



تابع در $x=0$ نیم‌مماس قائم دارد پس خط مبدأ اگر در $x=0$ بر نمودار مماس است آنگاه قائم باشد

(جواب پایین صفحه)

سوال ۳

$(1, \frac{۲+m}{۴}) \to y' = \frac{(۲+m)۴ - (۲+m)}{۱۶} = \frac{۳(۲+m)}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \to m = ۲$

$m+n = ۲+۱ = ۳$

$y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \to \frac{۳}{۴} + \frac{n}{۴} = \frac{۲+m}{۴} \to m-n = ۱ \longrightarrow n = ۱$

سوال ۴

$f(x) = x\,g(x)+۱ \to g(x) = \frac{f(x)-۱}{x} \to \lim_{x\to۰} g(x) = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{hop}} \frac{+f'(۰)}{۰} = f'(۰)$

$f(x) = \left(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x}\right)^۲ \to f'(x) = ۲\left(\frac{\cos x(۱+\sin x) - \cos x(-۱+\sin x)}{(۱+\sin x)^۲}\right) \times \left(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x}\right)$

$\longrightarrow f'(۰) = ۲ \times \left(\frac{۲}{۱}\right) \times (-۱) = -۴$

سوال ۱۸

$f(x) = ۴\sqrt{x}(۴x^۲+۳) = ۱۸x^۲\sqrt{x} + ۶\sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = ۳۰x\sqrt{x} + \frac{۳}{\sqrt{x}} = \frac{۳۰x^۲+۳}{\sqrt{x}}$

$y - ۴\sqrt{\alpha}(۴\alpha^۲+۳) = \frac{۳۰\alpha^۲+۳}{\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \xrightarrow{(۰,۰)} -۴\sqrt{\alpha}(۴\alpha^۲+۳) = \frac{۳۰\alpha^۲+۳}{\sqrt{\alpha}}(-\alpha)$

$\to ۲(۴\alpha^۲+۳) = ۳۰\alpha^۲+۳ \to ۱۲\alpha^۲ = ۳ \to \alpha^۲ = \frac{۱}{۴}$

$m = \frac{۳۰(\frac{۱}{۴})+۳}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = ۱۸\sqrt{۲}$

سوال ۹

d لیب $\to y = ax$ $\qquad A(\alpha, a\alpha)$

$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{-۴\alpha^۲+\alpha+۱} = a\alpha \to a\sqrt{\alpha}(-۴\alpha^۲+\alpha+۱) = ۱ \to -۴a\alpha^{\frac{۵}{۲}} + a\alpha^{\frac{۱}{۲}} + a\alpha^{\frac{۳}{۲}} = ۱$

$\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} -۱۰a\alpha^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۳}{۲}a\alpha^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}a\alpha^{-\frac{۱}{۲}} = ۰ \xrightarrow[\times ۲\sqrt{\alpha}]{\div a} -۲۰\alpha^۲ + ۳\alpha + ۱ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{۱}{۵} \\ \alpha = \frac{۱}{۴} \end{cases}$

$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{-۴(\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} + ۱} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

سوال ۱۰

$(f \circ g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}))' = g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^- \times f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)$

$g(x) = (x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}} \to g'(x) = -\frac{۱}{۲}(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}} \times ۲x \to g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^-) = \frac{۱}{\sqrt{(\frac{۵}{۴})^- - ۱}} = \frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-} = ۲^+$

$f'(۲^+) = ((۲x)^۳)' = (۸x^۳)' = ۲۴x^۲ = ۲۴ \times ۴$

$\to g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^-) \times f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-) = -۴\sqrt{۵} \times ۴ \times ۲۴ \longrightarrow \frac{۲۴ \times ۴ \times (-۴\sqrt{۵})}{-۴۸\sqrt{۵}} = ۸$