حسن شهابی

۱-

$m_{مماس} \Rightarrow y = mx + ۱$ $\qquad f'(۲) = m_{مماس} \longrightarrow \boxed{f'(۲) = \frac{۴}{۳}}$

$\Delta = ۰ \quad \boxed{m = \frac{۴}{۳}}$

۲-

$A \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix} \right.$ $\qquad m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{۲-۱}{۲-(-۱)} = \frac{۱}{۳}$

$B \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.$

$y = \frac{۱}{۳}(x + ۲)$

$y_{خط} = y_f \Longrightarrow \frac{A+۴}{۳} = \sqrt{aA-۱} \longrightarrow (A+۴)^۲ = ۹(aA-۱) \Rightarrow A^۲+۸A+۱۶ = ۹aA-۹$

$\left.\begin{matrix} A^۲+(۸-۹a)A+۲۵ = ۰ \\ \Delta = ۰ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow ۸-۹a = \pm۱۰$ $\xrightarrow{+۱۰} -\frac{۲}{۹}$ غ ق ق $\qquad (A-۵)^۲ = ۰ \Rightarrow A = ۵$

$\xrightarrow{-۱۰} ۲$ ق ق

$\boxed{f(۵) = \sqrt{۱۰-۱} = ۳}$

$f'(A) = f'(۵) = m_y \Longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۱۰-۱}} = \frac{۱}{۳}$ ✓

۳-

$f(x) = g(x)$

$f'(x) = g'(x) \longrightarrow \frac{x^۲+mx+۱}{x+۳} \longrightarrow \frac{\overset{۲x^۲+mx+۶x+۳m}{\cancel{(۲x+m)(x+۳)}} - (x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{x^۲+۶x+۳m-۱}{(x+۳)^۲} = \frac{۳}{۴}$

$g'(x) = \frac{۳}{۴}$ $\qquad ۴x^۲+۲۴x+۱۲m-۴ = ۳x^۲+۱۸x+۲۷ \qquad x^۲+۶x+۱۲m-۳۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰}$

$\Delta = ۳۶ - ۴(۱۲m-۳۱) = ۰ \quad -۴۸m = -۱۶۰ \quad \boxed{m = \frac{۱۰}{۳}}$

$x^۲+۶x+\frac{۱۲\times۱۰}{۳}-۳۱ = x^۲+۶x+۹ \Rightarrow (x+۳)^۲ = ۰$

$\frac{x^۲+\frac{۱۰}{۳}x+۱}{(x+۳)} \longrightarrow \frac{(x+۳)(۳x+۱)}{(x+۳)}$ $\to -۳$ غ ق ق $\qquad f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \qquad \boxed{m+n = \frac{۱۰}{۳}+۱ = \frac{۱۳}{۳}}$

$\to -\frac{۱}{۳}$ ق ق $\qquad g(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \qquad {}^{f}y = ۳x+n$

${}^{f}y = \cancel{۳(-\frac{۱}{۳})}_{-۱} + n = ۰ \quad \boxed{n = ۱}$

۴-

۵-

$g'(\sqrt[۵]{۲})\, f'(g(\sqrt[۵]{۲})) = f\circ g(\sqrt[۵]{۲})'$

$f\circ g(x) = x \quad \boxed{f\circ g(x)' = 1}$

$$f\circ g = \frac{1}{\sqrt[۵]{\frac{1}{x^۵+|x^۵|} + \left|\frac{1}{x^۵+|x^۵|}\right|}} = \frac{1}{\sqrt[۵]{\frac{1}{۲x^۵}+\frac{1}{۲x^۵}}} = \frac{1}{\sqrt[۵]{\frac{1}{x^۵}}} = \frac{1}{1/x^{\cancel{۵}}} = x$$

۶-

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{x} \longrightarrow \frac{\frac{(-1+\sin x)^۲}{(1+\sin x)^۲}-1}{x} = \frac{(-1+\sin x)^۲-(1+\sin x)^۲}{x(1+\sin x)^۲} = \frac{1+\sin^۲-۲\sin x-1-\sin^۲ x-۲\sin x}{x(1+\sin x)^۲}$$

$$\frac{-۴\sin x}{x(1+\sin x)^۲} = g(x) \quad \lim_{x\to 0}\frac{-۴\sin x}{x(1+\sin x)^۲} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \frac{-۴\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x)^۲} = \boxed{-۴}$$

۷-

$g(x) = -f(x) \longrightarrow g(x) = -x^۲-1 \qquad d \parallel x \longrightarrow m_d = 0 \Longrightarrow y_\alpha = y_\beta$

$g'(x) = -۲x$

α, β

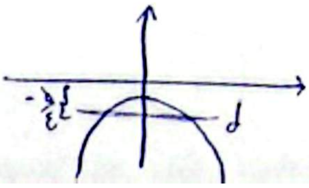
$-۲\alpha = \frac{-1}{-۲\beta} = -۴\alpha\beta = 1$

$g(\alpha) = g(\beta) \longrightarrow -\alpha^۲-1 = -\beta^۲-1$

$\alpha^۲-\beta^۲ = 0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 0 \quad \boxed{\alpha = -\beta}$

$-۴(-\beta)(\beta) = 1 \qquad ۴\beta^۲ = 1 \qquad \boxed{\begin{matrix}\beta = 1/۲\\ \alpha = -1/۲\end{matrix}} \qquad \boxed{g(\beta) = -1/۴ - 1 = -\frac{۵}{۴}}$



فاصله d از مبدأ مختصات $\frac{۵}{۴}$ است

$f'(a) = \frac{f(a)}{a}$ ۸-

$f(x) = ۲\sqrt{x}(۴x^۲+۳) = ۲\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۴x^۲+۳) + ۸x\sqrt{x}\right) = \frac{۸x^۲+۶}{۲\sqrt{x}}$ $\cancel{+۲۸x\sqrt{x} = \frac{۸x^۲+۶+۱۶x^۲}{۲\sqrt{x}}}$

$\cancel{۲} \times \frac{۴x^۲+۳+۱۶x^۲}{\cancel{۲}\sqrt{x}}$

$\frac{۴x^۲+۳+۸x^۲}{\sqrt{x}} = \frac{۱۲x^۲+۳}{\sqrt{x}}$

$\cancel{\frac{۲\sqrt{x}(۴x^۲+۳)}{x} = \frac{۱۲x^۲+۳}{\sqrt{x}} \Rightarrow ۲x(۴x^۲+۳) = x(۱۲x^۲+۳)}$ $۸x^۲+۶ = ۱۲x^۲+۳$

$۴x^۲ = ۳$

$\frac{۲\sqrt{x}(۴x^۲+۳)}{x} = \frac{۴x^۲+۳+۱۶x^۲}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow ۴x(۴x^۲+۳) = x(۲۰x^۲+۳)$

$۱۶x^۲+۱۲ = ۲۰x^۲+۳$

$\cancel{۴x^۲ = ۹}$ $۱۲x^۲ = ۳$

$x^۲ = \frac{۱}{۴}$ $\to x = \frac{۱}{۲}$ ق ق

$\to x = -\frac{۱}{۲}$ غ ق ق

$\cancel{a = \frac{۱}{۲}}$

$m_f = \frac{f(a)}{a} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}\left(\overset{۴}{\cancel{۴(\frac{۱}{۲})^۲}}+۳\right)}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۸\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۲} = \boxed{۸\sqrt{۲}}$

۹

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-۲x^۲+x+۱)-(-۴x+۱)(\sqrt{x})}{(-۲x^۲+x+۱)^۲}=\frac{\frac{-۲x^۲+x+۱\overset{+۸x^۲-۲x}{-(-۴x+۱)(۲x)}}{۲\sqrt{x}}}{(-۲x^۲+x+۱)^۲}$$

$$\frac{۶x^۲-x+۱}{۲\cancel{\sqrt{x}}(-۲x^۲+x+۱)^{\cancel{۲}}}=\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{x}(-۲x^۲+x+۱)}=$$ ~~[illegible]~~ $۶x^۲-x+۱=-۴x^۲+۲x+۲$

~~[illegible]~~ $۱۰x^۲-۳x-۱=0 \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ ق ق

$\rightarrow x=-\frac{۱}{۵}$ غ ق ق

$$\frac{\frac{\sqrt{x}}{-۲x^۲+x+۱}}{\frac{x}{۱}}=\frac{\sqrt{x}}{x(-۲x^۲+x+۱)}$$

$$f(\tfrac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{-۲(\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}\qquad\boxed{f(\tfrac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$\cancel{-۲(\frac{۱}{۴})}+\frac{۳}{۲}$

$-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۱$

$$(f\circ g)'=f(g(x))'=g'(x)f'(g(x))\longrightarrow -۴\sqrt{۵}\times۶(۲x)^۲=\boxed{-۲۴\sqrt{۵}\times۱۶}$$

$$g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}}\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^۳}}=-۴\sqrt{۵}\qquad\boxed{\frac{-۲۴\sqrt{۵}\times۱۶}{-۴۸\sqrt{۵}}=۸}$$

$\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}>\frac{۱}{۲}$ چون مشتق چپ است

$[\frac{۱}{x}]>۲$

$$g(\tfrac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=۲^+\rightsquigarrow[۲^+]=۲\qquad f(۲)=(۲x)^۳$$

$$f'(۲)=۳(۲x)^۲(۲)=۶(۲x)^۲$$