نام و نام خانوادگی بردیا بابائیان .... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۲۴... کلاس دوازدهم ریاضی A ....

$A(0,1) \quad B(3,5)$

$$m_{AB}=\frac{5-1}{3-0}=\frac{4}{3} \to f'(3)=\frac{4}{3}$$

۱

$A(-1,1)\ ,\ B(2,2)$

$$m_{AB}=\frac{2-1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$$

خط $\to y-2=\frac{1}{3}(x-2)$

$$\to y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

$$\sqrt{ax-1}=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \to 3\sqrt{ax-1}=x+4$$

$$\to 9(ax-1)=x^2+8x+16 \to x^2+(8-9a)x+25=0$$

$$\Delta=0 \to (8-9a)^2-4(25)=0 \to (8-9a)^2=100$$

$8-9a=10 \to a=-\frac{2}{9} \longrightarrow$ تابع در ازای ۵ ت ن می‌شود ✗

$8-9a=-10 \to a=\frac{18}{9}=2$ ✓

$$f(x)=\sqrt{2x-1} \to f(5)=\sqrt{9}=\boxed{3}$$

۲

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+3} \to y'=\frac{(2x+m)(x+3)-(x^2+mx+1)}{(x+3)^2} \to y'(1)=\frac{(2+m)\times 4-(1+m+1)}{4^2}=\frac{3}{4}$$

$4y-3x=n \to y=\frac{3}{4}x+\frac{n}{4} \to m=\frac{3}{4} \to$ شیب خط مماس در $x=1$ برابر این عدد است

$$\to 4(m+2)-2-m=12$$

$$\to 3m=6 \to \underline{m=2}$$

$y=\frac{x^2+2x+1}{x+3} \xrightarrow{x=1} \frac{1+2+1}{1+3}=1 \to A(1,1) \to$ این نقطه روی خط هم قرار دارد

$$\to 1=\frac{3}{4}+\frac{n}{4} \to \underline{n=1}$$

$$m+n=2+1=\boxed{3}$$

۳

$$g(x)=\frac{3}{3+\sin x} \longrightarrow g'(x)=\frac{-3\cos x}{(3+\sin x)^2} \to g'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{-3\times\frac{1}{2}}{\left(3+\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{(6-\sqrt{3})^2}{4}}=\frac{-6}{(6-\sqrt{3})^2}$$

$$f(x)=\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}=\frac{\cancel{(3-\sin x)}(9+\sin^2 x+3\sin x)}{\cancel{(3-\sin x)}(3+\sin x)}=\frac{\sin^2 x+3\sin x+9}{3+\sin x} \longrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(2\sin x\cos x+3\cos x)(3+\sin x)-(\cos x)(\sin^2 x+3\sin x+9)}{(3+\sin x)^2} \to f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{}$$

$$\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+9\right)}{\left(3+\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{39}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{(6-\sqrt{3})^2}{4}}=\frac{-6\sqrt{3}+3-\frac{39}{2}+3\sqrt{3}}{(6-\sqrt{3})^2}=\frac{-\frac{33}{2}-3\sqrt{3}}{(6-\sqrt{3})^2}$$

۴

$$g'(x)\times f'(g(x))=(f\circ g)'(x)$$

$$x>0 \to g(x)=\frac{1}{2x^5}\ ,\ x>0 \to f(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{2x}} \Rightarrow f\circ g(x)=f\left(\frac{1}{2x^5}\right)=-x$$

$$\xrightarrow{\ '\ } \boxed{-1}$$

$$3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{-18}{(6-\sqrt{3})^2}+\frac{\frac{33}{2}+3\sqrt{3}}{(6-\sqrt{3})^2}=\frac{-\frac{3}{2}+3\sqrt{3}}{\underbrace{36+3}_{39}-12\sqrt{3}}=\frac{-\frac{3}{2}+3\sqrt{3}}{39-12\sqrt{3}}=\frac{1+2\sqrt{3}}{22}$$

۵

۶

$$g(x)=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2-1}{x}=\frac{1+\sin x^2-2\sin x-1-\sin x^2-2\sin x}{(1+\sin x^2+2\sin x)x}$$

$$=\frac{-4\sin x}{(1+\sin^2 x+2\sin x)x} \to \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x}{(1+\sin^2 x+2\sin x)x} \to \sin x\sim x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{(1+x^2+2x)x}=\frac{-4}{(1+x^2+2x)}=\frac{-4}{1}=\boxed{-4}$$

۷

ضابطه قرینه سهمی نسبت به محور x ← $y=-x^2-1$

خط افقی d، نمودار تابع را در دو نقطه به طول‌های α و -α قطع می‌کند و بنابر فرض مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند.

$$f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-1 \to (-2\alpha)(2\alpha)=-1 \to \alpha^2=\frac{1}{4}$$

$$f(x)=-x^2-1 \to f'(x)=-2x$$

$$f(\alpha)=f(-\alpha)=-\alpha^2-1=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$$

معادله‌ی خط d به صورت $y=-\frac{5}{4}$ و فاصله‌ی این خط با مبدأ مختصات $\frac{5}{4}=1/25$ است.

۸

خط d ← $y=mx$

$$f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)=mx \to 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=mx \quad (1)$$

$$f'(x)=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=m \quad (2)$$

$$(1),(2) \to 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=(20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})x \to 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=20x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}} \to 12x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\to 3\sqrt{x}\,(4x^2-1)=0 \to x=0,\ x=\pm\frac{1}{2}$$

مقادیر ۰ و $-\frac{1}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا به ازای $x=0$ شیب خط m وجود ندارد و $x=-\frac{1}{2}$ نیز در دامنه نمی‌گنجد ← $x=\frac{1}{2}$ ✓

$$m=20\times\frac{1}{2}^{\frac{3}{2}}+3\times\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}=20\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}=\boxed{8\sqrt{2}}$$

۹

معادله‌ی خط d ← $y=9x$

d و f در نقطه‌ی A مماس هستند و شیب آن‌ها در این نقطه برابر است و همچنین عرض آن‌ها نیز برابر است.

$$\sqrt{x}=t \to f(x)=\frac{t}{-2t^4+t^2+1}$$

$$\frac{t}{-2t^4+t^2+1}=9t^2 \to -18t^5+9t^3+9t-1=0$$

$$\xrightarrow{\ '\ } -90t^4+27t^2+9=0 \to -9(\underbrace{10t^4-3t^2-1}_{(t^2-\frac{1}{2})(t^2+\frac{1}{5})})=0$$

$t^2=-\frac{1}{5}$ ✗

$t^2=\frac{1}{2}$

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-2(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+1}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

۱۰

$$(f\circ g(x))'=g'(x)\times f'(g(x)),\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \to g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x$$

$$\to g'(\tfrac{\sqrt{5}}{2})=-\frac{1}{2}\times(\tfrac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}\times\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$$

مشتق می‌گیریم و تابع در نقطه‌ی $\frac{\sqrt{5}}{2}$ پیوسته است.

$$x\to(\tfrac{\sqrt{5}}{2})^- \to g(x)=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^-}}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^-}=2^+$$

$$f(x)=(2x)^3=8x^3 \to f'(x)=24x^2 \to f'(2^+)=24\times 4$$

پس باید از تابع f به ازای $x\to 2^+$ مشتق بگیریم

$$x\to 2^+ \to [2^+]=2$$

$$f'(g(\tfrac{\sqrt{5}}{2}^-))\times g'(\tfrac{\sqrt{5}}{2}^-)=24\times 4\times -4\sqrt{5}=8(-48\sqrt{5}) \to$$ برابر ۸