پرهام شریعتی 14.5

۱- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=1-\frac{a}{x}$ در بازه $[1,3]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییرات این تابع در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟ $(a\neq 0)$

آهنگ تغییر متوسط $= \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{(1-\frac{a}{3})-(1-a)}{2} = \frac{a}{3}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای $f'(x)=\frac{a}{x^2}$

$\longrightarrow \frac{a}{3}=\frac{a}{x^2} \longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

با توجه به بازه‌ی $[1,3]$

$x=\sqrt{3}$

2

۲- سهمی $y=2ax^2-5x+18a$ در نقطه‌ی A بر نیمساز ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات مماس است، مقدار a را بیابید.

$2ax^2-5x+18a=x \rightarrow 2ax^2-6x+18a=0 \xrightarrow{\div 2} ax^2-3x+9a=0$

$ax^2-3x+9a=0 \xrightarrow{\Delta=0} 9-4(a)(9a)=0 \rightarrow 9-36a^2=0 \rightarrow a^2=\frac{1}{4} \rightarrow a=\pm\frac{1}{2} \rightarrow a=\frac{-1}{2}$

$a=\frac{1}{2} \rightarrow$ معادله تقاطع $\rightarrow x^2-6x+9=(x-3)^2=0 \rightarrow$ ریشه مثبت غ ق ق

$2ax^2-5x+18a=-x$

$2ax^2-4x+18a=0$

$\Delta=0 \longrightarrow 16-4(2a)(18a)=0$

$16-144a^2=0 \longrightarrow a^2=\frac{16}{144} \longrightarrow a=\pm\frac{4}{12}=\pm\frac{1}{3}$

1.5

$a=\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}x^2-5x+6=-x \longrightarrow \frac{2}{3}x^2-4x+6=0$

$\frac{4}{3}x-4=0$

$x=3$ ✗

ناحیه سوم نیست!

$a=-\frac{1}{3} \longrightarrow -\frac{2}{3}x^2-5x-6=-x$

$-\frac{2}{3}x^2-4x-6=0$

$-\frac{4}{3}x-4=0$

$x=-3$ ✓ $\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

ناحیه سوم

Scanned with CamScanner

پرهام شریعتی

۳ - مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ را بیابید.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \longrightarrow x = \pm 2$

		-2		2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

min نسبی

$\longrightarrow f(-2) = 8 - 24 + 2 = -14$

2

۴ - نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله‌ی بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع را بیابید.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2b$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 0 \longrightarrow b = 0 \\ f'(-2) = 0 \longrightarrow 12 - 4a = 0 \longrightarrow a = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

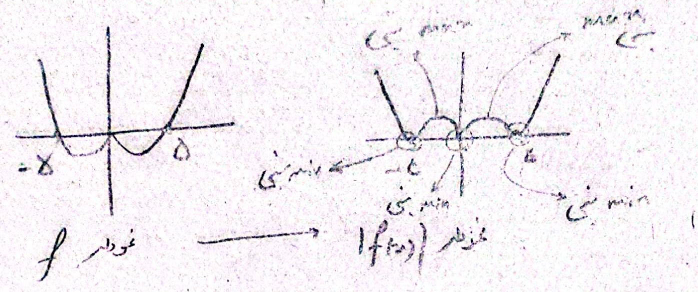
$$ext \begin{cases} (0, -4) \\ (-2, 0) \end{cases} \longrightarrow d = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

2

برهام شریعتی

۵- تابع f با ضابطه $f(x)=x^2-5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $y=|f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ را بیابید.

$$f(x)=x^2-5|x|=\begin{cases} x^2-5x & x\geq 0 \\ x^2+5x & x<0 \end{cases}$$

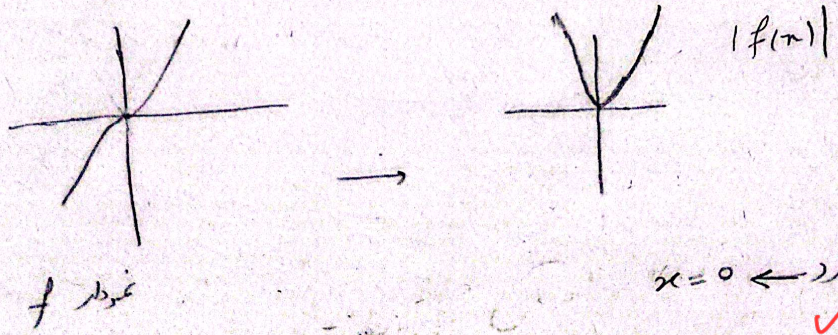


$m=2$
$n=3$ $\longrightarrow \frac{n}{m}=\frac{3}{2}$

۲

۶- تابع $y=|f(x)|$ که در آن $f(x)=x(|x|+3)$ است، چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

$$f(x)=x(|x|+3)=\begin{cases} x^2+3x & x\geq 0 \\ -x^2+3x & x<0 \end{cases}$$

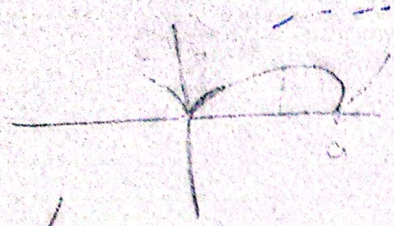


۲

تنها یک نقطه بحرانی دارد $\longleftarrow x=0$

پرهام شریعتی

۷- ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,|x-a|$ روی بازه‌ی $[0,a]$ برابر ۱٫۵ است. مقدار a را بیابید.



شکل تابع با توجه به اینکه max بین $[0,a]$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(a-x)$ بین $[0,a]$ $\longrightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(a-x)-\sqrt[3]{x^2}$

$\longrightarrow f'(x)=\frac{2a-2x-3x}{3\sqrt[3]{x}}=0$

$x=\frac{2a}{5}$

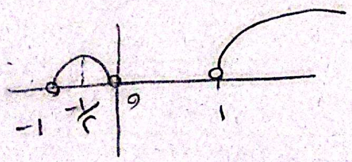
۲

$f(\frac{2a}{5})=\sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\times\frac{3a}{5}=\frac{3}{2}$

$a=2.5$

۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2-x} & -1\leq x\leq 0\\ \sqrt{x^2-1} & x\geq 1\end{cases}$



$K=4$ نقطه بحرانی $-\frac{1}{2}, 0, 1, -1$

$m=1$ ماکسیمم نسبی: $-\frac{1}{2}$

$n=$ مینیمم نسبی $=0$

$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{-2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=0 \longrightarrow x=-\frac{1}{2}$

۲

$K=4$
$m=1$
$n=0$
$\frac{4+0}{4-0}=\frac{4}{4}=1$

پرهام شریعتی

۹- به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y=\frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه‌ی $(1,+\infty)$ نزولی است؟ $(m\neq 2)$

تابع ما هموگرافیک است؛

$y'=\frac{m(m-1)-2}{(x-1+m)^2}\leq 0 \xrightarrow{\text{صورت کسر باید منفی باشد}} m(m-1)-2\leq 0 \to m^2-m-2\leq 0 \to -1\leq m\leq 2$ (1)

$x=1-m$ مجانب قائم است و طول آن نباید در بازه‌ی $(1,+\infty)$ باشد:

$1-m\leq 1 \to m\geq 0$ (2)

$\underline{1\cap 2} \to 0\leq m\leq 2 \xrightarrow[m\neq 2]{m\in\mathbb{Z}} m=0,1$

۲

۱۰- تابع $f(x)=\frac{x}{1-x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x^2} & x\geq 0\\ \frac{x}{1+x^2} & x<0\end{cases} \to f'(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x\geq 0\\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x<0\end{cases}$

$f'(x)=0 \xrightarrow{x<0} 1-x^2=0 \to x=-1,+1$ غ ق ق

$\xrightarrow{x>0}$ مشتق همواره مثبت است

بررسی نقطه گوشه $\to f'_+(0)=1$، $f'_-(0)=1$ پس تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است!

تنها یک نقطه بحرانی $\to x=-1$

۲