۱۹٫۵

ساهان نجفی

۱)

$f(1) = 1 - a \qquad f(3) = 1 - \frac{a}{3}$

$\frac{f(3) - f(1)}{2} = \bar{m} \Rightarrow \frac{1 - \frac{a}{3} - 1 + a}{2} = \frac{a}{3}$

$f'(x) = +\frac{a}{x^2} \Longrightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3} \Longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}} \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} & \times \\ x = \sqrt{3} & \checkmark \end{cases}$

۱٫۷۵

۲)

$2ax^2 - 5x + 18a = x \rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$

$\Delta = 0 \Longrightarrow 36 - 4(2a)(18a) = 0 \longrightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

۲

$1)\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \longrightarrow$ چون صورت سؤال گفته در ناحیه سوم ریشه دارد

$2)\ a = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \longrightarrow \boxed{x = -3}$ چون منفی باشد

۳)

$y = x^3 - 12x + 2 \Longrightarrow y' = 3x^2 - 12 \Longrightarrow \begin{array}{c|ccc} & -2 & & 2 \\ \hline & + & - & + \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array}$

۲

$\Rightarrow f(2) = 8 - 24 + 2 = \boxed{-14}$

۴) چون تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است پس در نقاطی دارای اکسترمم نسبی مشتق آن برابر صفر است

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \longrightarrow y' = 3x^2 + 2ax - 2b$

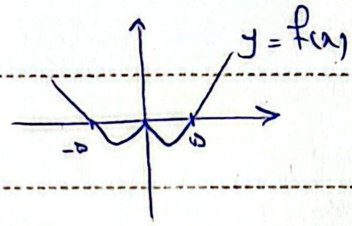
$\begin{cases} x = 0 \longrightarrow -2b = 0 \longrightarrow b = 0 \\ x = -2 \longrightarrow 12 - 4a = 0 \longrightarrow a = 3 \end{cases} \Longrightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$

۲

$f(0) = -4, \quad f(-2) = 0 \Longrightarrow d = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$

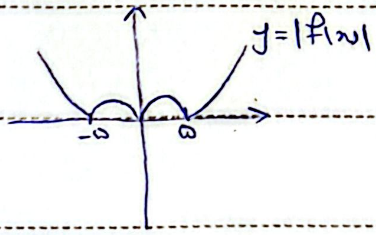
مادن بختی

(5) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x\ ; & x\geq 0 \\ x^2+5x\ ; & x<0 \end{cases} \Longrightarrow$



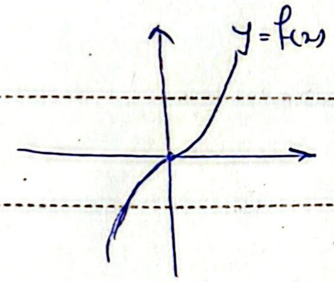
2

$\Rightarrow$

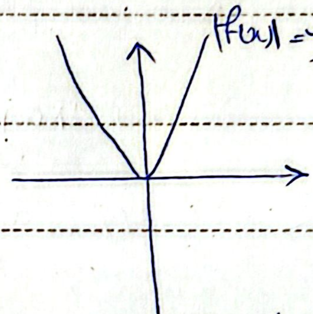


$\Longrightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=2 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{n}{m}=\dfrac{3}{2}=\boxed{1/5}$

(6) $f(x)=\begin{cases} x(x+3)\ ; & x\geq 0 \\ x(-x+3)\ ; & x<0 \end{cases}$



$\Longrightarrow$



2

تنها دارای یک نقطه بحرانی است $x=0$

(7) مطابق بازه داده شده پس a عددی مثبت است بنابراین داریم:

$0\leq x\leq a \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2}(a-x) \longrightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\times(a-x)+\sqrt[3]{x^2}(-1)$

$\Longrightarrow \dfrac{2a-2x}{3\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow 2a-2x=3x \Rightarrow \dfrac{2a}{5}=x$

2

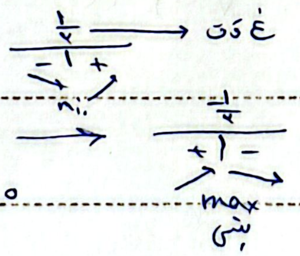
$f(0)=f(a)=0 \longrightarrow f(\frac{2a}{5})=\sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\times\frac{3a}{5}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4a^5}{25}=\frac{125}{8}$

$\Rightarrow a^5=(\frac{5}{2})^5 \Rightarrow \boxed{a=\frac{5}{2}}$

(8) $f(x)=\sqrt{x|x|-x} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-x}\ ; & x\geq 0 \\ \sqrt{-x^2-x}\ ; & -1\leq x\leq 0 \end{cases}$

2

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\ ; & x\geq 1 \\ \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}\ ; & -1\leq x\leq 0 \end{cases}$



$\Longrightarrow m=1\ ,\ n=0\ ,\ K=\{-1,0,1,-\frac{1}{2}\}$

$\Longrightarrow \dfrac{Km+n}{K-n}=\dfrac{4\times 1+0}{4-0}=\dfrac{4}{4}=1$ (1)

ماهان نجفی

$-1 \leq m \leq 2 \,,\, m \neq 2 \rightarrow -1 \leq m < 2$ (I)

$(I) \cap (II) \rightarrow m = 0, 1$

۹) برای نزولی بودن باید مشتق منفی باشد و تابع در بازهٔ مذکور مجانب قائم نداشته باشد

۱٫۲۵

$$y = \frac{mx+2}{x+m-1} \longrightarrow y' = \frac{m(m-1)-2}{(x+m-1)^2} = \frac{m^2-m-2}{(x+m-1)^2} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} & -1 & & 2 \\ + & & - & & + \end{array} \Rightarrow -1<m<2$$

$$x+m-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1-m \Rightarrow 1-m<1 \Rightarrow 0<m \rightarrow 0<m<2$$

تنها به ازای یک مقدار صحیح m برقرار است و آن m=1 است

۱۰)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} \,; & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x^2} \,; & x<0 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \,, & x \geq 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \,, & x<0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ این تابع در نقطهٔ صفر مشتق‌پذیر است

* این تابع تنها دارای یک نقطهٔ بحرانی است

۲