9

۱۶,۷۵

شنتیا مرادی

**۱)** ۱,۷۵

آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1,3]$ $= \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{(1-\frac{a}{3})-(1-\frac{a}{1})}{2} = \dfrac{\frac{2a}{3}}{2} = \dfrac{a}{3}$

$f'(x) = +\dfrac{a}{x^2}$ آهنگ تغییر لحظه‌ای

$\Rightarrow \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{a}{3} \overset{(a\neq 0)}{\Rightarrow} x^2 = 3 \Rightarrow x=\sqrt{3} , x=-\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3}$ ✗

$x=\sqrt{3}$ ✓

**۲)** ۱,۵

برای اینکه یک خط در یک نقطه بر منحنی تابع مماس شود باید طول آن نقطه ریشه مکرر معادله تلاقی آن دو نمودار باشد

$y_1 = x , y_2 = 2ax^2 - 5x + 18a \Rightarrow 2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a$

$(x \leq 0)$

$ax^2 - 3x + 9a = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4(a)(9a) = 0 \rightarrow 9 - 36a^2 = 0 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{-1}{2}$

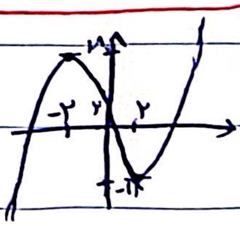
$a=\frac{1}{2} \rightarrow$ معادله تقاطع $\rightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0 \rightarrow$ ریشه مثبت غ ق ق

ریشه مضاعف $\Delta = 0$: $\Delta = (-6)^2 - 4(2a)(18a) = 0 \Rightarrow 4 \times 36a = 36 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$ ($\Rightarrow$ ریشه $= x = -\frac{-6}{2(2a)} = -6 \leq 0$ ✓ ق ق)

**۳)** ۲

$y = x^3 - 12x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | 18 | ↘ | −14 | ↗ | $+\infty$ |



از شکل نمودار واضح است که $x=-2$ مینیمم نسبی است (چون از همه نقاط همسایگی خود عرض کمتری دارد)

**۴)** ۲

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax - 2b$

نقاط اکسترمم های نسبی جاهایی است که مشتق صفر است پس $x=-2$ و $x=0$ ریشه های مشتق هستند (تابع مشتق پذیر)

$3(-2)^2 + 2a(-2) - 2b = 0 \Rightarrow 2a + b = 6$

$3(0)^2 + 2a(0) - 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

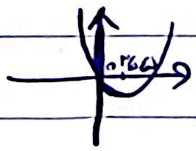
$\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$

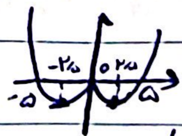
$x=-2 \rightarrow y = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0$ , $A(-2,0)$ ; $x=0 \Rightarrow y = 0^3 + 3\times 0^2 - 4 = -4$ , $B(0,-4)$

$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (-4-0)^2} = 2\sqrt{5}$ ✓

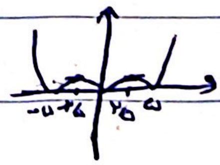
**۵)** ۲

$y = x^2 - 5x = x(x-5) \xrightarrow[\text{به جای } x \text{ ، } |x|]{\text{قرینه سازی}} y = (|x|)^2 - 5|x| = x^2 - 5|x| \longrightarrow y = |x^2 - 5|x||$





قسمت منفی حذف می شود و قرینه نسبت به محور x جایگزین می گردد



ماکزیمم نسبی: $x=-2.5$ , $x=2.5$ ; $m=2$

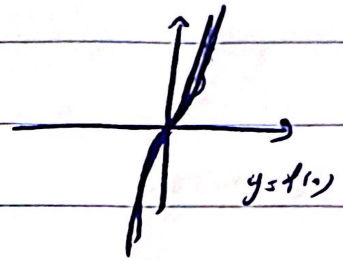
مینیمم نسبی: $x=5$ , $x=-5$ , $x=0$ ; $n=3$

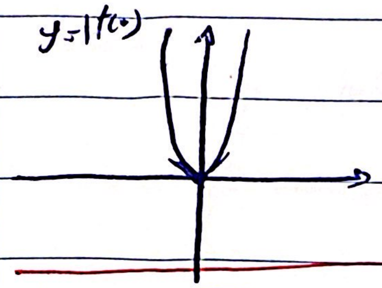
$\Rightarrow \boxed{\dfrac{n}{m} = \dfrac{3}{2}}$ ✓

(۶)

$f(x) = x(|x|+3) = x|x| + 3x = \begin{cases} x^2+3x & x \geq 0 \\ -x^2+3x & x < 0 \end{cases}$

$-x(x-3)$




→ یک نقطه بحرانی $x=0$ مشتق ناپذیر است

(۲)

---

(۷)

$f(x) = -\sqrt[3]{x^2}(x-a) \longrightarrow f'(x) = -\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)(x-a) - \sqrt[3]{x^2}(1)$ چون $x \in (0,a)$ داریم

$(x<a \Rightarrow |x-a| = -(x-a))$

در بازه $(0,a)$ پیوسته است

$= -\frac{2(x-a)}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2}$

(جواب پایین صفحه) (۱)

$-\frac{2(x-a)}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow -\frac{2(x-a)}{3\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x^2}$

تابع پیوسته ... ماکزیمم مطلق محل و شدن مشتق است که

با توجه به سوالات زیر تنها یک اکسترمم داریم که حتما ماکزیمم بوده (جدول تغییرات مشتق نیز این را نشان می‌دهد)

$\rightarrow -\frac{2}{3}(x-a) = x = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}a \Rightarrow x = 0/4a = 1/5 \Rightarrow a = \frac{15}{4}$

---

(۸)

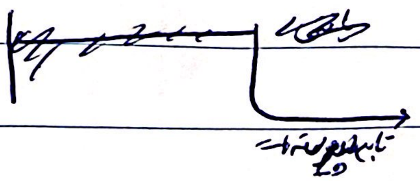
$x(|x|-1) \geq 0$ ، دامنه

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-x}\,; & x \geq 0 \\ \sqrt{-x^2-x}\,; & x < 0 \end{cases}$

| x | | -1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

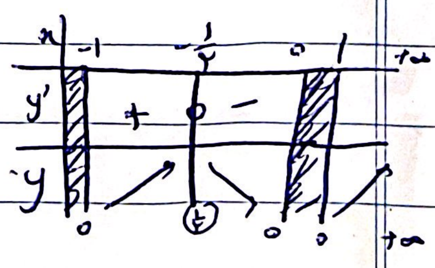
$\rightarrow D_f = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

(۲)

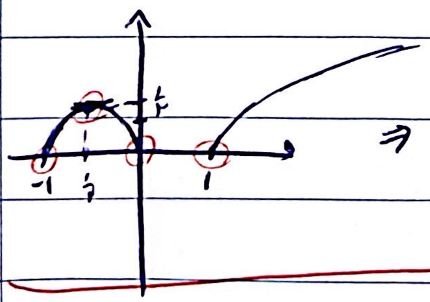


ریشه ترین نشده

$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\,; & x > 0 \\ \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}\,; & x < 0 \end{cases}$




ریشه مشتق $x = -\frac{1}{2}$




$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 & (x = -\frac{1}{2}) \\ n = 0 & \\ k = 4 & (x=-1 \text{ و } x=-\frac{1}{2} \text{ و } x=0 \text{ و } x=1) \end{cases} \Rightarrow \frac{km+n}{k-n} = 1$

---

(۹)

$f'(x) < 0 \rightarrow ad - bc < 0 \rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \rightarrow (m-2)(m+1) < 0 \rightarrow -1 < m < 2 \;, m \neq 2 \rightarrow -1 < m < 2 \;(I)$

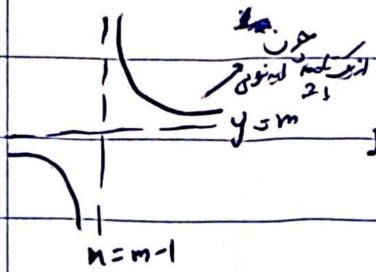
ریشه مخرج $= x = 1 - m < 1 \rightarrow m > 0 \;(II)$

$(I) \cap (II) \rightarrow m = 0, 1$

ARSH

۱۵.

با رسم نمودار تابع $y=f(x)=\frac{mx+2}{x+m-1}$ مقادیر m را بدست آوریم




I) $f(0)=\frac{2}{m-1}>m \Rightarrow \frac{2-m^2+m}{m-1}>0 \Rightarrow -\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}>0$

| | -1 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | | - | | + | | - |

$m\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$

II) $1>m-1 \Rightarrow m<2$

پس بی‌نهایت مقدار صحیح m داریم

---

۱۶

$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x^2} & x>0\\ \frac{x}{1+x^2} & x\le 0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x>0\\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x\le 0\end{cases}$

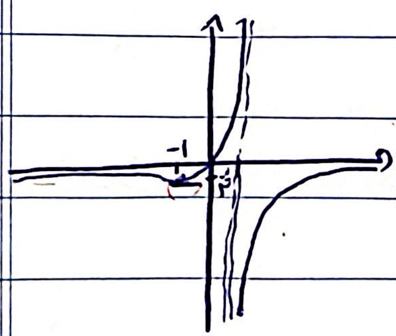
ریشه ندارد

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ریشه $x=-1$ و $x=+1$ (x) قابل قبول نیست

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$ , $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

۲




| x | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | - | | + | ‖ | + | |
| y | | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | |

یک نقطه بحرانی در $x=-1$ دارد

سؤال ۱۷

$x\in[0,a] \rightarrow |x-a|=-(x-a) \rightarrow f(x)=-\sqrt[3]{x^2}(x-a)=-x^{\frac{5}{3}}+ax^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}=0 \rightarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(-5x+2a)=0 \rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=\frac{2}{5}a \rightarrow max \checkmark\end{cases}$

$f(x_{max})=1/5 \rightarrow f(\frac{2}{5}a)=\frac{3}{2} \rightarrow -\sqrt[3]{\frac{4}{25}a^2}(\frac{2}{5}a-a)=\frac{3}{2} \rightarrow a\times\sqrt[3]{\frac{4}{25}a^2}=\frac{5}{2}$

$\xrightarrow{\text{توان ۳}} a^3\times\frac{4}{25}a^2=\frac{125}{8} \rightarrow a^5=\frac{125}{8}\times\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^5 \rightarrow a=\frac{5}{2}=2/5$