شنتیا سهرابی

۱

آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1,3]$ $= \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{(1-\frac{a}{3})-(1-\frac{a}{1})}{2} = \dfrac{\frac{2a}{3}}{2} = \dfrac{a}{3}$

$f'(x) = +\dfrac{a}{x^2}$ آهنگ تغییر لحظه‌ای

$\Rightarrow \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{a}{3} \xRightarrow{(a\neq 0)} x^2 = 3$

$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{3} \ , \ x=-\sqrt{3}}$

۲

برای اینکه یک خط در یک نقطه بر منحنی (یا تابع) مماس شود باید طول آن نقطه ریشه مکرر معادله تلاقی آن دو نمودار باشد

$y_1 = x \ , \ y_2 = 2ax^2 - 5x + 18a \Rightarrow 2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a$

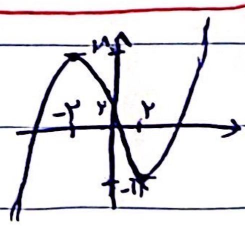
$(x<0)$

ریشه مضاعف $\Delta = 0$: $\Delta = (-6)^2 - 4(2a)(18a) = 0 \Rightarrow 4\times 36a = 36 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$ $\Rightarrow$ ریشه $= x = -\dfrac{-6}{2(2a)} = -6 < 0$ ✓

۳

$y = x^3 - 12x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12$
$= 3(x^2-4)$
$= 3(x-2)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	18	↘	−14	↗	$+\infty$



از شکل نمودار واضح است که $\boxed{x=-2}$ ماکزیمم نسبی است (چون از همه نقاط همسایگی خود عرض بیشتری دارد)

۴

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax - 2b$

$3(-2)^2 + 2a(-2) - 2b = 0 \Rightarrow 2a+b = 6$ نقاط اکسترمم های نسبی تابع مشتق پذیر در آنها مشتق صفر است پس $x=-2$ و $x=0$ ریشه های مشتق هستند

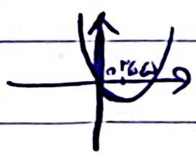
$3(0)^2 + 2a(0) - 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ $\Big\} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$

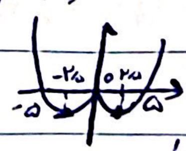
$x=-2 \rightarrow y = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0$, $A(-2,0)$; $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 + 3\times 0^2 - 4 = -4$, $B(0,-4)$

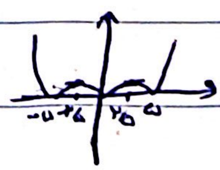
$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (-4-0)^2} = \boxed{2\sqrt{5}}$

۵

$y = x^2 - 5x = x(x-5) \xrightarrow[\text{با } |x|]{x \text{ بجای}} y = (|x|)^2 - 5|x| = x^2 - 5|x| \longrightarrow y = |x^2 - 5|x||$







قسمت منفی حذف می شود و قرینه قسمت منفی جایگزین آن می گردد

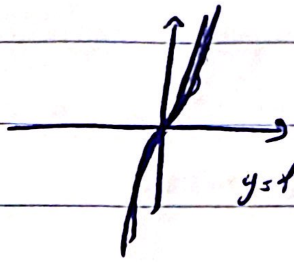
ماکزیمم نسبی: $x = -2.5$, $x = 2.5$; $m = 2$

مینیمم نسبی: $x = 5$, $x = -5$, $x = 0$; $n = 3$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{n}{m} = \dfrac{3}{2}}$

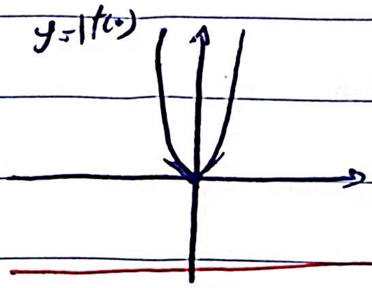
۶

$$f(x)=x(|x|+3)=x|x|+3x=\begin{cases}x^2+3x & x\geq 0\\ -x^2+3x & x<0\\ \quad -x(x-3)\end{cases}$$



$y=f(x)$

$y=|f(x)|$



$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{یک نقطه بحرانی} \quad x=0 \text{ مشتق ناپذیر است}}$

۷

$f(x)=-\sqrt[3]{x^2}(x-a) \longrightarrow f'(x)=-\left(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)(x-a)-\sqrt[3]{x^2}(1)$ چون $x\in(0,a)$ داریم

$(x<a \Rightarrow |x-a|=-(x-a))$

$\boxed{\text{در بازه } (0,a) \text{ پیوسته است}}$

$$=-\frac{2(x-a)}{3\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2}$$

$-\dfrac{2(x-a)}{3\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow -\dfrac{2(x-a)}{3\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x^2}$ تابع پیوسته اکسترمم مطلق محل صفر شدن مشتق است

با توجه به محاسبات زیر تنها یک اکسترمم داریم که حتماً ماکزیمم بوده (جدول تغییرات مشتق نیز این را نشان می‌دهد)

$\Rightarrow -\frac{2}{3}(x-a)=x=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{5}{3}x=\frac{2}{3}a \Rightarrow \underset{\text{اکسترمم}}{x}=0/4a=1/5 \Rightarrow \boxed{a=\frac{15}{4}}$

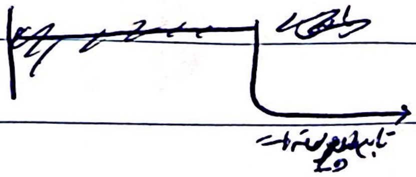
۸

شرط دامنه، $x(|x|-1)\geq 0$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x}\,; & x\geq 0\\ \sqrt{-x^2-x}\,; & x<0\end{cases}$$

x	-1		0		1	
	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	

$\Rightarrow D_f=[-1,0]\cup[1,+\infty)$

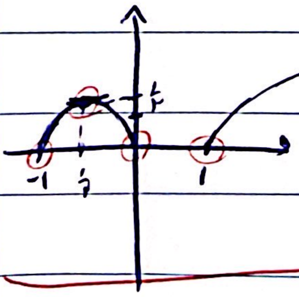


ریشه ترین نقطه

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\,; & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}\,; & x<0\end{cases}$$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	0 $\nearrow$	$+\infty$

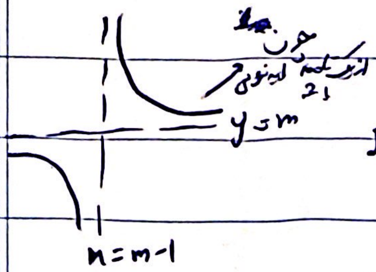
ریشه مشتق $x=-\frac{1}{2}$



$$\Rightarrow\begin{cases}m=1 & (x=-\frac{1}{2})\\ n=0\\ k=4 & (x=-1 \text{ و } x=-\frac{1}{2} \text{ و } x=0 \text{ و } x=1)\end{cases}\Rightarrow \boxed{\frac{km+n}{k-n}=1}$$

۹

بازه مقادیر m را بیابید تا تابع $y=f(x)=\frac{mx+2}{x+m-1}$ ... را بیستی آیسی



I) $f(0)=\frac{2}{m-1}>m \Rightarrow \frac{2-m^2+m}{m-1}>0 \Rightarrow -\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}>0$

	-1		1		2	
$+$		$-$		$+$		$-$

$\boxed{m\in(-\infty,-1)\cup(1,2)}$

II) $1 \geq m-1 \Rightarrow m<2$

پس بی‌نهایت مقدار صحیح m داریم

---

(10)

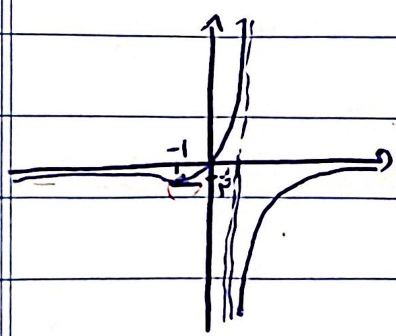
$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x^2} & x>0\\ \frac{x}{1+x^2} & x\leq 0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x>0\\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x\leq 0\end{cases}$

ریشه ندارد

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ریشه $x=-1$ و $x=+1$ ✓، $x=+1$ قابل قبول نیست (x)!

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$



x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$+$	
y	↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	

یک نقطه بحرانی در $x=-1$ دارد