بهرام شریعتی ۱۹٫۲۵

۱- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $k+m+n$ را بیابید.

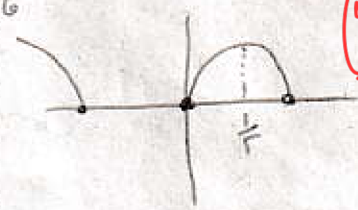
$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$

$x(1-|x|)\geq 0 \longrightarrow x\leq -1$ یا $0\leq x\leq 1$

$D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

چون ۱ و ۰ و ۱- سر بسته بازه اند ← بحرانی‌اند

$f'(x)=\dfrac{1\pm 2x}{2\sqrt{x-|x|x}}=0 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$ (با دامنه) $\longrightarrow x=\frac{1}{2}$ قابل قبول



$m=1$
$n=0$
$k=4$

$m+n+k=1+0+4=5$ ✓

۲

۲- حاصلضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a>0$ باشد، مقدار $[a]$ را بیابید.

$f'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=0 \longrightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x=a-2x \rightarrow x=\frac{a}{6}$

نسبی ext
بحرانی

$D_f=x\geq 0\ ,\ x\leq\frac{a}{2} \longrightarrow D_f=0\leq x\leq\frac{a}{2}$

$x=0 \longrightarrow f(0)=\sqrt{a}$

$x=\frac{a}{6} \longrightarrow f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}}_{\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}\simeq 1.2}\Big)\sqrt{a} \rightsquigarrow max$

$x=\frac{a}{2} \longrightarrow f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}}=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{0.7}\sqrt{a} \rightsquigarrow min$

۲

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}=\sqrt{12} \longrightarrow a=4 \longrightarrow [a]=4$ ✓

برهام شریعتی

۳_ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع f را بیابید:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\,|x^2-4|$$

$x=\pm 1$ ساده

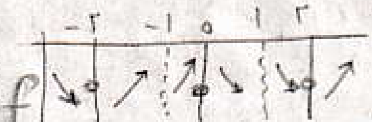
$x=\pm 2$ ها ← بجای مشتق ناپذیر ext نسبی ۲

چون $x=\pm 2$ نقاط گوشه‌ای و $x=0$ ریشه مرتبه دوم تابع است بنابراین این نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع‌اند.

$$f'(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\begin{cases} 2x=0 \rightarrow x=0 \\ x^4-2x^2+4=0 \quad x^2=t \\ t^2-2t+4=0 \rightarrow \Delta<0 \end{cases}$$

پس نقاط ext : $x=0, \pm 2$



اگر ۴ ـ ۲ را از منفی فرض کنیم جواب مشتق چون آن را برابر صفر قرار دادیم تغییری نمی‌کند.

2

۴_ نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند. حاصل ab را بیابید:

$$\begin{cases} f(0)=0 \rightarrow d=0 \\ f(1)=1 \rightarrow a+b+c=1 \xrightarrow{c=0} a+b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(0)=0 \rightarrow c=0 \\ f'(1)=0 \rightarrow 3a+2b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \rightarrow a=-2,\ b=3 \rightarrow ab=-6$$

2

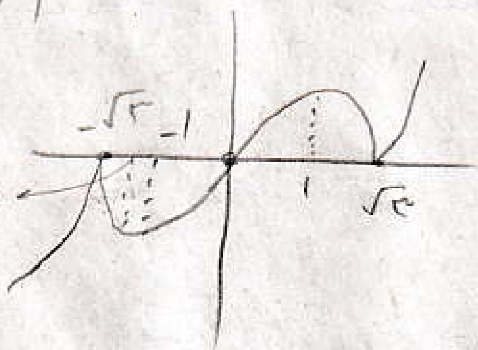
برهام شریعتی

۵ - مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|3-x^2|$ در بازه‌ی $[-1/5 , \sqrt{3}]$ را بیابید.

۱/۵

$=-1$

$x|(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})|$



$x=-1 \rightarrow f(-1)=-2$

$f(x)=\pm\underbrace{(x)(3-x^2)}_{(3x-x^3)} \longrightarrow f'(x)=0=\pm(3-3x^2) \longrightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

۶ - نقطه‌ی $A(-1,1)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^2|x|+3ax^2+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ را بیابید.

حل اکسترمم نسبی منفی است و به ازای $x<0$ ، $|x|=-x$ داریم.

$y=-x^3+3ax^2+b$

$y'=-3x^2+6ax$

$\longrightarrow f(-1)=1 \rightarrow 1+3a+b=1$

$f'(-1)=0 \rightarrow -3-6a=0$

$\rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a}=-3$

۲

پرهام شریعتی

۷- محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y=\frac{(ax+3)}{(a+1)x+(a-1)}$ نقطه‌ی مینیمم تابع $y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

نقطه برخورد مجانب‌ها $\left(\frac{1-a}{a+1}, \frac{a}{a+1}\right)$

$x_s=-\frac{1}{3}$ رأس $\longrightarrow \frac{1-a}{a+1}=-\frac{1}{3} \longrightarrow a=2$

۴

$$\Longrightarrow y=\frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} 2x+3=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

۸- نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2}, 3)$ محل تلاقی مجانب های نمودار زیر است.

$y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$ مقدار $\frac{b}{a}$ را بیابید.

مجانب افقی: $\frac{b}{4}=3 \rightarrow b=12$

مجانب قائم: $4x^2+ax+1=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 1-\frac{a}{2}+1=0 \rightarrow \frac{a}{2}=2 \rightarrow a=4$

$$\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$$

۲

پرهام شریعتی

۹- بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها کدام است؟

$$f'=\frac{(4x^3)(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}=0$$

$$\to x^3(x^3-32)=0 \begin{cases} x^3=0 \longrightarrow x=0 \\ x^3-32=0 \longrightarrow x=2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
f'	$+$	0	$-$	ن ت	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ تابع در بازه‌ی $[0,2)$ و $(2,2\sqrt[3]{4}]$ اکیداً نزولی است که طول این بازه‌ها به ترتیب ۲ و $2\sqrt[3]{4}-2$ است

$\longleftarrow$ مینیمم طول بازه: $2\sqrt[3]{4}-2$

۲

۱۰- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3}$ و $x\in(-2,2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد را بیابید.

1,5

$$f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2}\le 0$$

$2x^5-12x^3+6x=0 \to 2x(x^4-6x^2+3)=0 \to \{x=0$

$\to x^4-6x^2+3=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-6t+3=0 \to t=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}=3\pm\sqrt6 \to \begin{cases} x=\pm\sqrt{3-\sqrt6} \\ x=\pm\sqrt{3+\sqrt6} \ \text{غ ق ق} \end{cases}$

$$\frac{(4x^3)(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2}\le 0 \longrightarrow \frac{2x(x^4-4x^2+3)}{(x^2-3)^2}\le 0 \to \frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-3)^2}\le 0$$

چون تابع f با دامنه $(-2,2)$ مفروض است، در ریشه‌های مخرج یعنی $x=\sqrt3$ و $x=-\sqrt3$ ناپیوسته است و در این نقاط مشتق تابع تعریف نمی‌شود.

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)}{x^2-3}\le 0$$

x		$-\sqrt3$		$-\sqrt{3-\sqrt6}$		0		$\sqrt{3-\sqrt6}$		$\sqrt3$	
y'	$-$	ن ت	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	ن ت	$+$

$\longrightarrow$ در ۳ بازه اکیداً نزولی

x	-2		$-\sqrt3$		-1		0		1		$\sqrt3$		2
$f'(x)$		$-$	ن ت	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	ن ت	$+$	

$(-2,-\sqrt3)$ و $[-1,0]$ و $[1,\sqrt3)$ $\longleftarrow$ اکیداً نزولی

سلام. وقت بخیر. با ترجیب به تعطیلی آموزشگاه ممنون می‌شوم لطف کنید این سوال را برای من حل بفرمایید. سپاسگزارم.

تابع $f(x) = ax + \sqrt{x^2+1}$ نزولی اکید باشد. حدود a؟

$\to D_f = \mathbb{R}$

جواب پاسخنامه: $a \le -1$

$\to f'(x) < 0$

$$f'(x) = a + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \quad (I)$$

$$\boxed{-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1} \leftarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| < 1 \leftarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \leftarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

این کسر رو که بررسی کنی می‌فهمی یه کسر همواره کوچیک‌تر ۱ و بزرگتر ۱- .
اگه تو بی‌نهایت ام ازش حد بگیری با ترتیب میشه ۱+ و ۱-

$$a-1 < f'(x) < a+1 \xrightarrow{(I)} a+1 < 0 \to a < -1$$

$a \le -1 \leftarrow$ مساوی اش به خاطر اینه که کسر $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ حد یک نیست.