پرهام شریعتی

۱- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$ را درنظر بگیرید.
اگر m و n به ترتیب نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $k+m+n$ را بیابید.

$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$

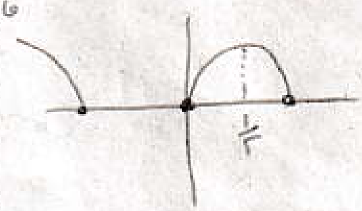
$x(1-|x|)\geq 0 \longrightarrow x\leq -1$ یا $0\leq x\leq 1$

$D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

چون ۱ و ۰ و ۱- سر بسته بازه اند ← بحرانی!

$f'(x)=\dfrac{1\pm 2x}{2\sqrt{x-|x|x}}=0 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} x=\frac{1}{2}$

قابل قبول



$m=1$
$n=0$ $\quad m+n+k=1+0+4=5$
$k=4$

۲- حاصلضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a>0$ باشد، مقدار $[a]$ را بیابید.

$f'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=0 \longrightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x=a-2x \rightarrow x=\frac{a}{6}$

ext نسبی
بحرانی

$D_f=x\geq 0$ و $x\leq\frac{a}{2} \longrightarrow D_f=0\leq x\leq\frac{a}{2}$

$x=0 \longrightarrow f(0)=\sqrt{a}$

$x=\frac{a}{6} \longrightarrow f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=\underbrace{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}_{\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}\simeq 1.2}\sqrt{a} \rightsquigarrow max$

$x=\frac{a}{2} \longrightarrow f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}}=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{0.7}\sqrt{a} \rightsquigarrow min$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}=\sqrt{12} \longrightarrow a=4 \longrightarrow [a]=4$

برهام شریعتی

۳_ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع f را بیابید.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\,|x^2-4|$$

$x=\pm 1$

ساده ن

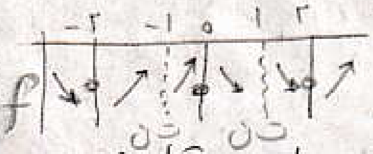
$x=\pm 2$ ها ← برای مشتق ناپذیری ۲ ext نسبی

چون $x=\pm 2$ نقاط گوشه‌ای و $x=0$ ریشه مرتبه دوم تابع است بنابراین این نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع‌اند.

$$f'(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^4-2x^2+4=0 \quad x^2=t \\ t^2-2t+4=0 \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

پس نقاط ext: $x=0, \pm 2$



اگر x^4-2x^2+4 را نیز منفی فرض کنیم جدول مشتق چون آن را برابر صفر گذاشتیم تغییری نمی‌کند. ۲

۴_ نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند. حاصل ab را بیابید.

$$\begin{cases} f(0)=0 \rightarrow d=0 \\ f(1)=1 \rightarrow a+b+c=1 \xrightarrow{c=0} a+b=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0)=0 \rightarrow c=0 \\ f'(1)=0 \rightarrow 3a+2b=0 \end{cases}$$

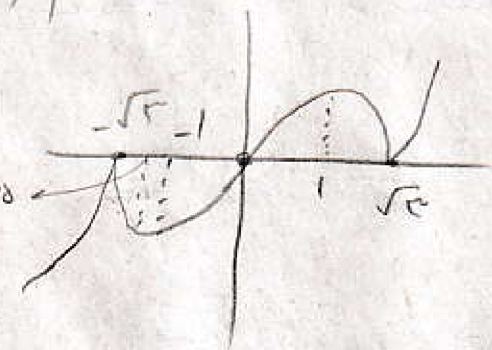
$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \rightarrow a=-2,\ b=3 \rightarrow ab=-6$$

برهام شریعتی

۵- مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|3-x^2|$ در بازه‌ی $[-1.5 , \sqrt{3}]$ را بیابید.

$\underline{\underline{-1}}$

$x|(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})|$



$f(x)=\pm\underbrace{(x)(3-x^2)}_{(3x-x^3)} \longrightarrow f'(x)=0=\pm(3-3x^2) \longrightarrow x^2=1 \to x=\pm 1$

۶- نقطه‌ی $A(-1,1)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^2|x|+3ax^2+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ را بیابید.

حل اکسترمم نسبی ست و بازای $x<0$، $|x|=-x$ داریم.

$y=-x^3+3ax^2+b$

$y'=-3x^2+6ax$

$\longrightarrow f(-1)=1 \to 1+3a+b=1$

$f'(-1)=0 \to -3-6a=0$

$\to \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \to \frac{b}{a}=-3$

پرهام شریعتی

۷- محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y=\dfrac{(ax+3)}{(a+1)x+(a-1)}$

نقطه‌ی مینیمم تابع $y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$\left(\dfrac{1-a}{a+1},\dfrac{a}{a+1}\right)$ نقطه برخورد مجانب‌ها

$x_s=-\frac{1}{3}$ رأس

$\longrightarrow \dfrac{1-a}{a+1}=-\dfrac{1}{3} \longrightarrow a=2$

$\Longrightarrow y=\dfrac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} 2x+3=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2}$

۸- نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2},3)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار زیر است.

$y=\dfrac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$

مقدار $\frac{b}{a}$ را بیابید.

مجانب افقی $=\frac{b}{4}=3 \rightarrow b=12$

مجانب قائم $= 4x^2+ax+1=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 1-\frac{a}{2}+1=0 \rightarrow \frac{a}{2}=2 \rightarrow a=4$

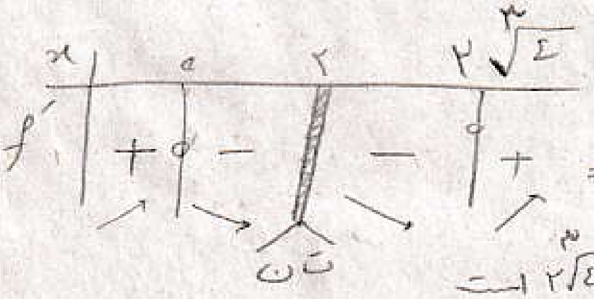
$$\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$$

پرهام شریعتی

۹- بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها کدام است؟

$$f'=\frac{(4x^3)(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}=0$$

$$\to x^3(x^3-32)=0\quad\begin{cases}x^3=0\to x=0\\ x^3-32=0\to x=2\sqrt[3]{4}\end{cases}$$



$\Rightarrow$ تابع در بازه‌ی $[0,2)$ و $(2,2\sqrt[3]{4}]$ اکیداً نزولی است که طول این بازه‌ها به ترتیب ۲ و $2\sqrt[3]{4}-2$ است

مینیمم طول بازه: $2\sqrt[3]{4}-2$

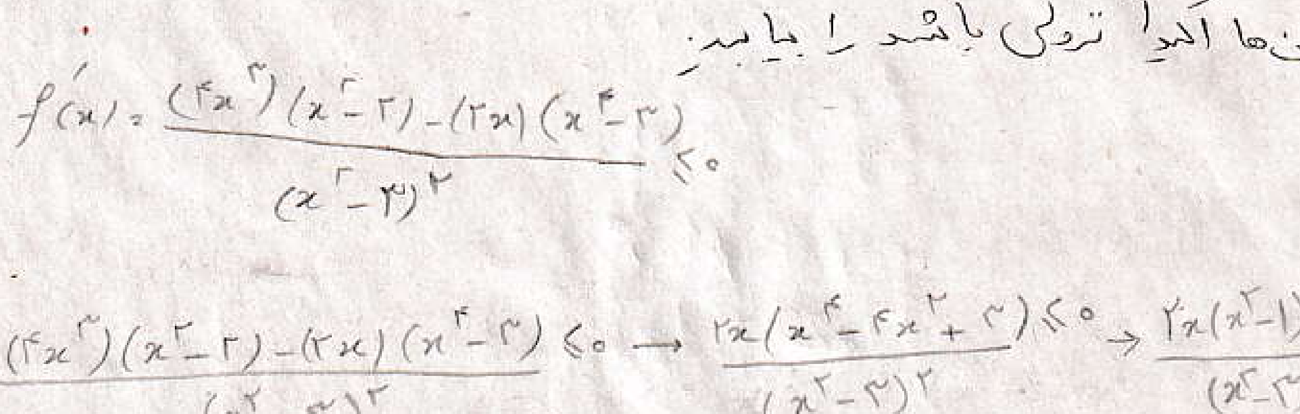
۱۰- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3}$ و $x\in(-2,2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد را بیابید.

$$f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2}\leq 0$$

$$\frac{(4x^3)(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2}\leq 0\to\frac{2x(x^4-4x^2+3)}{(x^2-3)^2}\leq 0\to\frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-3)^2}\leq 0$$

چون تابع f با دامنه $(-2,2)$ مفروض است در ریشه‌های مخرج یعنی $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ ناپیوسته است، و در این نقاط مشتق تابع تعریف نمی‌شود.

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)}{x^2-3}\leq 0$$



$[1,\sqrt{3})$ و $[-1,0]$ و $(-2,-\sqrt{3})$ ← اکیداً نزولی

سلام. وقت بخیر. با توجه به تعطیلی آموزشگاه ممنون می‌شوم لطف کنید این سوال را برای من حل بفرمایید. سپاسگزارم.

تابع $f(x) = ax + \sqrt{x^2+1}$ نزولی اکید باشد. حدود a؟

جواب پاسخنامه: $a \leq -1$