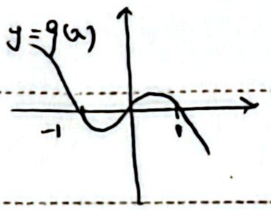
۱۸/۷۵

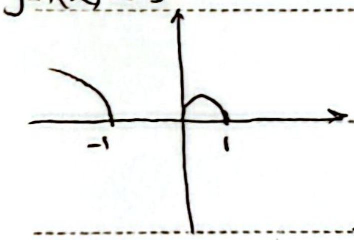
ماهان کبنی

① ابتدا ضابطه زیر رادیکال را رسم می‌کنیم

$g(x)=x-x|x|=\begin{cases}-x^2+x\ ; & x\geq 0\\ x^2+x\ ; & x<0\end{cases}$



$y=f(x)=\sqrt{g(x)}$



اکنون رادیکال را بر روی تابع اثر می‌دهیم: در نتیجه داریم $n=0\ ,\ m=1\ ,\ k=4$

$\Rightarrow k+m+n=\boxed{5}$

۲

② $D_f=[0,\frac{a}{2}] \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a-2x}}$

$\to a-2x=4x \to x=\frac{a}{6} \to f(0)=\sqrt{a}\ ,\ f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}} \longrightarrow y_{min}$

۲

$f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{a-\frac{a}{3}}=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}$

اکنون باید بین مقدار $f(\frac{a}{6})$ و $f(0)$ قیاس شود

$\sqrt{a} \bigcirc \sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ رساندن}} a < \frac{a}{6}+2\times\frac{a}{3}+\frac{2a}{3} \Rightarrow f(\frac{a}{6})=y_{max}$

$\to \sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\frac{a}{\sqrt{12}}+\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{12} \Rightarrow a+2a=12 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \boxed{[a]=4}$

③ وجود یا عدم وجود مخرج مشترک تأثیری روی ریشه‌های مشتق ندارد، بنابراین مخرج مشترک را برمی‌داریم:

$f^*(x)=\frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) \longrightarrow f^*(x)=(1+\frac{1}{x^2-1})(x^2-4)$

$\to f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}(x^2-4)+(1+\frac{1}{x^2-1})(2x)=0 \to \frac{x^2\times 2x}{x^2-1}=\frac{2x(x^2-4)}{(x^2-1)^2}$

۲

$\to x\in\{0,-2,2\}$ پس این تابع دارای ۳ نقطه اکسترمم نسبی است

④ $x=0 \to d=0\ ,\ y'=3ax^2+2bx+c \xrightarrow{x=0} c=0 \longrightarrow y=ax^3+bx^2$

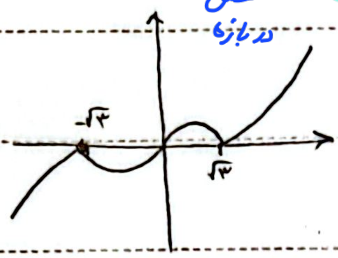
$\xrightarrow{x=1} a+b=1\ ,\ y'=3a+2b=0 \Rightarrow \begin{cases}3a+3b=3\\ 3a+2b=0\end{cases} \Rightarrow b=3\ ,\ a=-2 \Rightarrow \boxed{ab=-6}$

۲

نقاط بحرانی $\rightarrow \begin{cases} x=-1{,}5 \rightarrow f(-1{,}5) = -1{,}125 \\ x=-1 \rightarrow f(-1) = -2 \\ x=1 \rightarrow f(1) = 2 \\ x=\sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \longrightarrow$ min مطلق در بازه $= -2$

ماهان نجفی

⑤ $f(x) = x|x^2-3| \longrightarrow$



$\Rightarrow f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}|3-\frac{3}{4}|$

$= \boxed{-\frac{9\sqrt{3}}{8} = y_{min}}$

1

⑥ $y = \begin{cases} x^3+3ax^2+b \;;\; x \geq 0 \\ -x^3+3ax^2+b \;;\; x<0 \end{cases} \Longrightarrow f(-1) = 1+3a+b = 1 \Rightarrow 3a+b=0$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} -3x^2+6ax \xrightarrow{x=-1} -3-6a=0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{b}{a} = -3}$

2

⑦ ابتدا مختصات طول نقطه مینیمم تابع را بدست می‌آوریم: $\underset{\text{سهمی}}{x_{min}} = -\frac{1}{3}$

2

مجانب قائم: $(a+1)x + a-1 = 0 \longrightarrow (a+1)x = 1-a \Rightarrow x = \frac{1-a}{a+1}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{1-a}{a+1} \Rightarrow a=2 \Rightarrow \frac{2x+3}{3x+1} = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

⑧ مجانب افقی: $\frac{b}{4} = 3 \rightarrow b=12$

2

مجانب قائم: $4x^2+ax+1=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 1 - \frac{a}{2} + 1 = 0 \rightarrow a=4 \longrightarrow \boxed{\frac{b}{a} = 3}$

⑨ $D_f = \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow f'(x) = \frac{(4x^3)(x^3-8) - (x^4)(3x^2)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2}$

2

$= \frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2} = f'(x) \longrightarrow$

x		0		2^*		$2\sqrt[3]{4}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	‖	↘		↗

$\longrightarrow \boxed{\text{مینیمم طول بازه} = 2\sqrt[3]{4} - 2}$

⑩ $f'(x) = \frac{(4x^3)(x^2-3) + (x^4-3)(-2x)}{(x^2-3)^2} = \frac{4x^5-12x^3-2x^5+6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4-6x^2+3)}{(x^2-3)^2}$

$\rightarrow x^4-6x^2+3=0 \rightarrow x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \rightarrow x \begin{cases} \sqrt{3 \mp \sqrt{6}} \\ -\sqrt{3 \mp \sqrt{6}} \end{cases}$

1,75

-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$		2
‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖
	$-$		$-$		$+$		$-$		$+$			

$\boxed{\text{دارای ۳ بازه نزولی است}}$