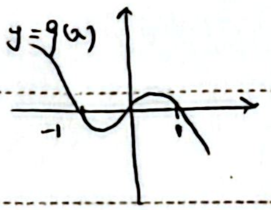
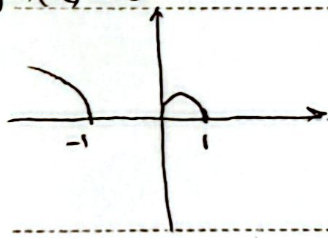
ماهان کفی

① ابتدا ضابطه زیر رادیکال را رسم می‌کنیم

$$g(x) = x - x|x| = \begin{cases} -x^2 + x \; ; & x \geq 0 \\ x^2 + x \; ; & x < 0 \end{cases}$$



$y = f(x) = \sqrt{g(x)}$



اکنون رادیکال را روی تابع اثر می‌دهیم: در نتیجه داریم $n = 0 , m = 1 , k = 4$

$\Rightarrow k + m + n = \boxed{5}$

② $D_f = [0, \frac{a}{2}] \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{a-2x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a-2x}}$

$\to a - 2x = 4x \to x = \frac{a}{6} \to f(0) = \sqrt{a} , f(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{a}{2}} \longrightarrow y_{min}$

$f(\frac{a}{6}) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{a - \frac{a}{3}} = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}}$

اکنون باید بین مقدار $f(\frac{a}{6})$ و $f(0)$ قیاس شود

$\sqrt{a} \bigcirc \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ رساندن}} a < \frac{a}{6} + 2 \times \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} \Rightarrow f(\frac{a}{6}) = y_{max}$

$\to \sqrt{\frac{a}{2}} \left(\sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} \right) = \frac{a}{\sqrt{12}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} \Rightarrow a + 2a = 12 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \boxed{[a] = 4}$

③ وجود یا عدم وجود قدر مطلق تاثیری روی ریشه‌های جفت ندارد، بنابراین قدر مطلق را برمی‌داریم:

$f^*(x) = \frac{x^2}{x^2-1} (x^2 - 4) \longrightarrow f^*(x) = (1 + \frac{1}{x^2-1})(x^2 - 4)$

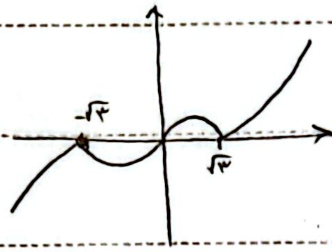
$\to f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}(x^2-4) + (1 + \frac{1}{x^2-1})(2x) = 0 \to \frac{x^2 \times 2x}{x^2-1} = \frac{2x(x^2-4)}{(x^2-1)^2}$

$\to x \in \{0, -2, 2\}$ پس این تابع دارای ۳ نقطه اکسترمم نسبی است

④ $x = 0 \to d = 0 , y' = 3ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} c = 0 \longrightarrow y = ax^3 + bx^2$

$\xrightarrow{x=1} a + b = 1 , y' = 3a + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 3 , a = -2 \Rightarrow \boxed{ab = -6}$

ماهان نجفی

⑤ $f(x)=x|x^2-3| \longrightarrow$  $\Rightarrow f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}|3-\frac{3}{4}|$

$= \boxed{\frac{-9\sqrt{3}}{8} = y_{min}}$

⑥ $y=\begin{cases} x^3+3ax^2+b \ ; \ x\geq 0 \\ -x^3+3ax^2+b \ ; \ x<0 \end{cases} \Longrightarrow f(-1)=1+3a+b=1 \Rightarrow 3a+b=0$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} -3x^2+6ax \xrightarrow{x=-1} -3-6a=0 \rightarrow a=\frac{-1}{2} \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{b}{a}=-3}$

⑦ ابتدا مختصات طول نقطه مینیمم تابع را بدست می آوریم: $x_{min}=\frac{-1}{3}$

مجانب قائم: $(a+1)x+a-1=0 \longrightarrow (a+1)x=1-a \Rightarrow x=\frac{1-a}{a+1}$

$\Rightarrow \frac{-1}{3}=\frac{1-a}{a+1} \Rightarrow a=2 \rightarrow \frac{2x+3}{3x+1}=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{2}}$

⑧ مجانب افقی: $\frac{b}{4}=3 \rightarrow b=12$

مجانب قائم: $4x^2+ax+1=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 1-\frac{a}{2}+1=0 \longrightarrow a=4 \longrightarrow \boxed{\frac{b}{a}=3}$

⑨ $D_f=\mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow f'(x)=\frac{(4x^3)(x^3-8)-(x^4)(3x^2)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2}$

$= \frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2} = f'(x) \longrightarrow$

x		0		2^*		$2\sqrt[3]{4}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\longrightarrow \boxed{\text{مینیمم طول بازه} = 2\sqrt[3]{4}-1}$

⑩ $f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-3)+(x^4-3)(-2x)}{(x^2-3)^2} = \frac{4x^5-12x^3-2x^5+6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4-6x^2+6)}{(x^2-3)^2}$

$\rightarrow x^4-6x^2+6=0 \rightarrow x^2=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{2} = 3\pm\sqrt{6} \rightarrow x\begin{cases}\sqrt{3\pm\sqrt{6}} \\ -\sqrt{3\pm\sqrt{6}}\end{cases}$

$\longrightarrow$

-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$		2
$\parallel$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	$\parallel$

$\boxed{\text{دارای ۳ بازهٔ نزولی است}}$