۱۷/۵

Date            No

۲۸ شماره            شتیا بهرامی

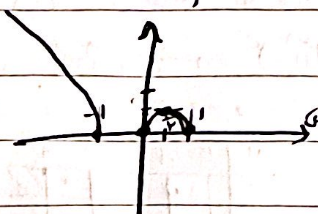
**۱**

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2+x} & 1\geq x\geq 0\\ \sqrt{x^2+x} & x\leq -1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} & 1>x>0\\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}$$

ریشه: $x=\frac{1}{2}$

ریشه: $x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | | $+$ | $0$ $-$ | |
| $y$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\searrow$ | |
| | $+\infty$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |



توجه کنید که مشتق در حد راست ۰ و در حد چپ ۱ ، تعریف نشده و نامتناهی است!

س: $m=1\ (x=\frac{1}{2}),\ n=0,\ k=4\ (x=-1$ و ۰ و $\frac{1}{2}$ و ۱$)$ $\Rightarrow \boxed{k+m+n=5}$

$x(1-|x|)\geq 0$ ریشه: $|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ، ریشه: $x=0$

| $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+$ $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$ (درست آمدن دامنه ی تابع)

**۲**

شروط دامنه: I) $x\geq 0$ , II) $a-2x\geq 0 \Rightarrow 2x\leq a \Rightarrow x\leq \frac{a}{2} \xRightarrow{a>0} \frac{a}{2}\geq x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,\frac{a}{2}]$ بدست آوردن دامنه!

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}}=\frac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$$

ریشه های مشتق $\rightarrow \sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x=4x \Rightarrow 6x=a \Rightarrow x=\frac{a}{6}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{a}{6}$ | | $\frac{a}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| | $\sqrt{a}$ | | $\sqrt{\frac{3a}{2}}$ | | $\sqrt{\frac{a}{2}}$ |

در نقطه ی ۰ و $\frac{a}{2}$ چون تابع در دو طرف متفاوت نیست، مشتق ناپذیرند (از طرفی حد تابع مشتق) در حد راست ۰ و حد چپ $\frac{a}{2}$ نامتناهی است. جایگذاری $\frac{a}{6}$ (و ۰ و $\frac{a}{2}$) برای تشخیص علامت مشتق در نقاط

بیشترین مقدار تابع: $\sqrt{\frac{3a}{2}}$ و کمترین مقدار تابع $\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\Rightarrow \sqrt{12}=\sqrt{\frac{3a}{2}}\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \boxed{[a]=4}$

**۳**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\geq 2\\ -\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & -2<x<2\\ \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\leq -2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x>2\\ -\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & -2<x<2\\ \dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x<-2\end{cases}$$

(اگر $y=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow y'=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}$)

تابع در نقاط $x=\pm 1$ تعریف نشده و ناپیوسته است. همچنین تابع مشتق در نقاط $x=2$ و $x=-2$ تعریف نشده و مشتق ناپذیر است.

همه ی نقاط بحرانی را پیدا کنیم؛ ریشه های مشتق: $2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow 2x(x^4-2x^2+4)=0 \Rightarrow x=0$ ($\Delta<0$)

(قرینه شدن در ریشه ها نیز ...)

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ | | $+$ $0$ $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

$\boxed{\text{سه مینیمم نسبی}}$ در نقاط $x=-2$ ، $x=0$ و $x=2$ داریم

۴)

A: $0 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d \Rightarrow d=0$ , B: $1 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d \Rightarrow a+b+c+d=1$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$ نقاط اکسترمم نسبی یک تابع پیوسته (مثل ضابطه داده شده) همان نقاط بحرانی (در اینجا همان ریشه‌ها) مشتق

A: $3a(0)^2+2b(0)+c=0 \Rightarrow c=0$ , B: $3a(1)^2+2b(1)+c=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$

با توجه به عبارات بالا داریم $3a+2b=0$ و $a+b=1$ (چون $c=0$)

$\begin{cases}3a+2b=0\\2a+2b=2\end{cases} \Rightarrow a=-2 , b=3 \Rightarrow \boxed{ab=-6}$

۲

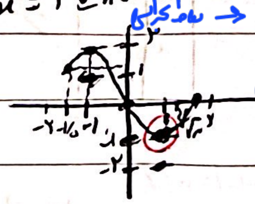
---

۵) چون x مدار در بازه $[-1/5 , \sqrt{3}]$ است و $-\sqrt{3} < -1/5$ پس قسمتی ...

$f(x) = x^3-3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2-3$

ریشه: $3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ یا $x=-1$

| x | $-1/5$ | $-1$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | $-\frac{9}{8}$ ↗ | 2 | ↘ | −2 | ↗ | 0 |



نقاط بحرانی →

$x=-1/5 \to f(-1/5) = -1/125$

$x=-1 \to f(-1) = -2$

$x=1 \to f(1) = 2$

$x=\sqrt{3} \to f(\sqrt{3}) = 0$

→ min مطلق در بازه $= -2$

$\boxed{x=1 : \text{مینیمم مطلق}}$

1

---

۶)

$3a+b=0 \quad (I)$ $\quad \boxed{a=-\frac{1}{2}} \xrightarrow{(I)} \boxed{b=\frac{3}{2}}$

$y = \begin{cases} x^3+3ax^2+b & x \geq 0 \\ -x^3+3ax^2+b & x<0 \end{cases}$ $\quad y' = \begin{cases} 3x^2+6ax & x \geq 0 \\ -3x^2+6ax & x<0 \end{cases}$

$A(-1,1) \Rightarrow -(-1)^3+3a(-1)^2+b=1 \Rightarrow 1+3a+b=1 \Rightarrow 3a+b=1$

اکسترمم نسبی در تابع پیوسته ...

$x=-1$ و $y'=0 \Rightarrow -3(-1)^2+6a(-1)=0 \Rightarrow -3-6a \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$

1/5

---

۷) می‌دانیم مجانب‌های تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، $x=-\frac{d}{c}$ و مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$ است. پس در تابع $y=\frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$

مجانب‌ها: $x=-\frac{a-1}{a+1}$ و $y=\frac{a}{a+1}$ هستند پس نقطه A$\left(\frac{1-a}{a+1}, \frac{a}{a+1}\right)$ مینیمم $f(x)=\frac{3}{2}x^2+3x...$ است.

از طرفی می‌دانیم مینیمم سهمی در $x = -\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد $\Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3})\right)$ ، $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

$\frac{1-a}{a+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3a-3 = a+1 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$ $\left(\frac{a}{a+1} = \frac{2}{3} \xrightarrow{a=2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\right)$

۲

---

۸) در صورت و مخرج درجه‌ها برابر است پس مجانب افقی $\lim_{x \to +\infty} \frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2}{4x^2} = \frac{b}{4}$ (جملات با بزرگترین توان)

$\frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b=12$

مجانب قائم: $4x^2+ax+1$ ، $x=-\frac{1}{2}$ مجانب قائم $\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج $\Rightarrow 4x^2+ax+1 = 4(x+\frac{1}{2})^2$

(حول ریشه مخرج که خاص صورت صفر نمی‌شود) $\Rightarrow 4x^2+ax+1 = 4x^2+4x+1 \Rightarrow a=4$ $\quad \left(\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{12x^2+7}{4(x+\frac{1}{2})^2} = +\infty\right)$

توجه کنید که چون صورت $12x^2+7$ نمی‌تواند ریشه داشته باشد تنها حالت ممکن برای قرار دادن $x=-\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج بود.

$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3}$

۲

Date No

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8} \longrightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-x^4(3x^2)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$ 9

2

ریشه های $f'$: $x^3(x^3-32)=0 \longrightarrow x=0,\ x^3-32=0 \Rightarrow x^3=32 \Rightarrow x=2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$

$x^3-8=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ از طرفی ۲ (تنها) ریشه مخرج تعریف نشده است

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $\sqrt[3]{32}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ $-$ | $\|$ $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $-\infty \nearrow$ | $0 \searrow -\infty$ | $+\infty \searrow$ | $f(\sqrt[3]{32}) \nearrow$ | $+\infty$ |

پس تابع در بازه $[0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{4}]$ نزولی است. ~~...~~ با طول های $2-0=2$ و $\boxed{2\sqrt[3]{4}-2}$ که دومی کوتاه‌تر است

---

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3} \Rightarrow D_f: x^2-3\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 3 \Rightarrow x\neq\pm\sqrt{3} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$$ 10

1

$$\hookrightarrow f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2}$$

ریشه های $f'$: $2x^5-12x^3+6x=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$, $\longrightarrow x^4-6x^2+3=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-6t+3=0 \quad t=\frac{+6\pm\sqrt{6^2-4(1)(3)}}{2(1)}$

$\rightarrow t=\frac{+6\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{+6\pm 2\sqrt{6}}{2}=+3\pm\sqrt{6}=x^2 \longrightarrow x^2=3-\sqrt{6} \rightarrow x=\pm\sqrt{3-\sqrt{6}} \rightarrow$ بین ۲ و ۲-

$x^2=3+\sqrt{6} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3+\sqrt{6}} \rightarrow$ خارج ۲ و ۲-

| $x$ | $-2$ | $-\sqrt{3-\sqrt{6}}$ | $0$ | $\sqrt{3-\sqrt{6}}$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ $0$ | $-$ $0$ | $+$ $0$ | $-$ |
| $y$ | | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

پس تابع در بازه های $[-\sqrt{3-\sqrt{6}},0]$ و $[\sqrt{3-\sqrt{6}},2]$ اکیداً نزولی است (دو بازه)

---

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{2x\left((2x^4-6x^2)-(x^4-3)\right)}{(x^2-3)^2}$$

$2x^5-12x^3+6x=0 \longrightarrow 2x(x^4-6x^2+3)=0 \longrightarrow \{x=0$

$\longrightarrow x^4-6x^2+3=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-6t+3=0 \longrightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}=3\pm\sqrt{6} \longrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3-\sqrt{6}} \\ x=\pm\sqrt{3+\sqrt{6}} \text{ غ ق ق} \end{cases}$

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3-\sqrt{6}}$ | | $0$ | | $\sqrt{3-\sqrt{6}}$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | ت ن | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ت ن | $+$ |

$\longrightarrow$ در ۳ بازه اکیداً نزولی

Date No

۲۸ ماردی

# شتیبا بهار

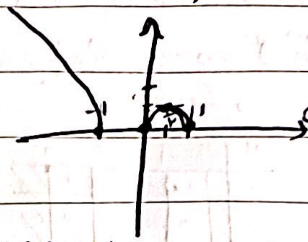
**(۱)**

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2+x} & 1\geq x\geq 0\\ \sqrt{x^2+x} & x\leq -1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} & 1>x>0\\[2mm] \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}$$

ریشه: $x=\frac{1}{2}$

ریشه: $x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | | | $+$ 0 $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | $0$ ↗ | $\frac{1}{2}$ ↘ | $0$ |



توجه کنید که مشتق در حد راست ۰ و در حد چپ ۱- و ۱ تعریف نشده (ناممکن) است!

س: $m=1\ (x=\frac{1}{2})$ ، $n=0$ ، $k=4\ (x=-1, 0$ و $1)$ $\Rightarrow \boxed{k+m+n=5}$

$|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ریشه

$x(1-|x|)\geq 0$

ریشه: $x=0$

| | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$ (برای بدست آوردن دامنه:)

**(۲)**

برای بدست آوردن دامنه: I) $x\geq 0$ , II) $a-2x\geq 0 \Rightarrow 2x\leq a \Rightarrow x\leq \frac{a}{2}$ $\xrightarrow{a>0} \frac{a}{2}\geq x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,\frac{a}{2}]$

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}}=\frac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$$

ریشه یابی مشتق $\rightarrow \sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x=4x \Rightarrow 6x=a \Rightarrow x=\frac{a}{6}$

| $x$ | $0$ | | $\frac{a}{6}$ | | $\frac{a}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $y$ | $\sqrt{a}$ | ↗ | $\sqrt{\frac{3a}{2}}$ | ↘ | $\sqrt{\frac{a}{2}}$ |

در ضمن ۰ و $\frac{a}{2}$ چون تابع در دو طرف متفاوت نیست، مشتق ناپذیرند لذا از طرفی تابع مشتق در جدول در حد چپ $\frac{a}{2}$ ناشناس است. جایگذاری $\frac{a}{2}$ برای تشخیص علامت مشتق لازم

بیشترین مقدار تابع: $\sqrt{\frac{3a}{2}}$ و کمترین مقدار تابع $\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\Rightarrow \sqrt{12}=\sqrt{\frac{3}{2}a}\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \boxed{[a]=4}$

**(۳)**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\geq 2\\[2mm] -\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & -2>x>2\\[2mm] \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\leq -2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}+\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x>2\\[2mm] -\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & -2<x<2\\[2mm] +\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x<-2\end{cases}$$

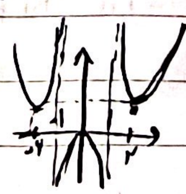
(اگر $y=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow y'=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}$

تابع در نقاط $x=\pm 1$ تعریف نشده و ناپیوسته است. همچنین تابع مشتق در نقاط $x=2$ و $x=-2$ تعریف نشده و مشتق ناپذیر است.

صورت مشترک را ساده کردیم، و ریشه یابی برای معادله ۵ ندارد. : $2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow 2x(\underbrace{x^4-2x^2+4}_{\Delta<0})=0 \Rightarrow x=0$

(قرینه شدن در ریشه های اثر ...)

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | | $+$ | $+$ 0 $-$ | $-$ | | $+$ |
| $y$ | ↘ | | ↗ | ↗ ↘ | ↘ | | ↗ |



$\boxed{\text{اکسترمم نسبی}}$ در نقاط $x=-2$ و $x=0$ و $x=2$ داریم

dotnote