۲۸ / مهر

شنتیا بهرامی

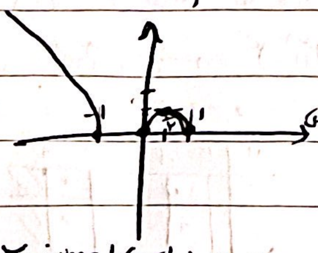
۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2+x} & 1\geq x\geq 0\\ \sqrt{x^2+x} & x\leq -1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} & 1>x>0\\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}$$

ریشه: $x=\frac{1}{2}$

ریشه $x=-\frac{1}{2}$ قق نیست

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1
y'		$-$				$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



توجه کنید که مشتق در حد راست ۰ و حد چپ ۱- و ۱ تعریف نشده و نامتناهی است!

$m=1\ (x=\frac{1}{2})$ و $n=0$ و $k=4\ (x=-1, 0, \frac{1}{2}, 1)$: پس $\boxed{k+m+n=5}$

$|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ریشه

$x(1-|x|)\geq 0$

ریشه: $x=0$

-1		0		1	
$+$ 0	$-$	0	$+$	0	$-$

درست آوردن دامنه f: $\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

۲

درست آوردن دامنه:

$I)\ x\geq 0$ و $II)\ a-2x\geq 0 \Rightarrow 2x\leq a \Rightarrow x\leq\frac{a}{2} \xrightarrow{a>0} \frac{a}{2}\geq x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,\frac{a}{2}]$

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a-2x}}=\frac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$$

ریشه یابی مشتق $\rightarrow \sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x=4x \Rightarrow 6x=a \Rightarrow x=\frac{a}{6}$

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{3a}{2}}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{a}{2}}$

در ضمن ۰ و $\frac{a}{2}$ چون تابع در دو طرف متفاوت هست، مشتق ناپذیرند از طرفی حد مشتق در حد راست ۰ و حد چپ $\frac{a}{2}$ نامتناهی است. جایگذاری ($\frac{a}{4}$) ($\frac{a}{2}$) برای تشخیص علامت مشتق

بیشترین مقدار تابع: $\sqrt{\frac{3a}{2}}$ و کمترین مقدار تابع $\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\Rightarrow \sqrt{12}=\sqrt{\frac{3}{2}a}\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \boxed{[a]=4}$

۳

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\geq 2\\ -\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & -2>x>2\\ \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\leq -2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}+\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x>2\\ -\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & -2<x<2\\ +\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x<-2\end{cases}$$

(اگر $y=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow y'=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}$

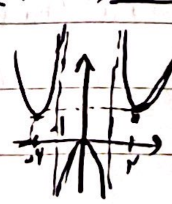
تابع در نقاط $x=\pm1$ تعریف نشده و ناپیوسته است. همچنین تابع مشتق در نقاط $x=2$ و $x=-2$ تعریف نشده و مشتق ناپذیر است.

حدود مشتق برای نقاط بحرانی؛ ریشه یابی: $2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow 2x(\underbrace{x^4-2x^2+4}_{\Delta<0})=0 \Rightarrow x=0$

عبارت داخل پرانتز ریشه ندارد برای معادله ۰ ندارد.

(قرینه شدن در ریشه‌های اول داده) محدوده

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2	
y'		$-$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$\boxed{\text{مینیمم نسبی}}$ در نقاط $x=-2$ و $x=0$ و $x=2$ داریم

۴)

A: $0 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d \Rightarrow d=0$, B: $1 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d \Rightarrow a+b+c+d = 1$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$ نقاط اکسترمم نسبی یک تابع پیوسته (مثل ضابطه داده شده) همان نقاطی است که علامت مشتق (در اطراف آن نقاط) تغییر میکند

A: $3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \Rightarrow c=0$, B: $3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

با توجه به موارد بالا داریم $3a+2b=0$ و $a+b=1$ (چون $c=0$)

$\begin{cases} 3a+2b=0 \\ 2a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow a=-2 , b=3 \Rightarrow \boxed{ab=-6}$

---

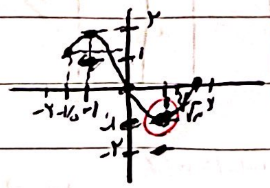
۵)

چون x در بازه $[-1/5 , \sqrt{3}]$ است ... پس قسمتی از دامنه ...

$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

$\rightarrow$ ریشه: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -1$

x	$-1/5$		-1		1		$\sqrt{3}$
y'		+	0	−	0	+	
y	$\frac{9}{8}$	↗	2	↘	-2	↗	0



$\boxed{\text{مینیمم مطلق}: x=1}$

---

۶)

$$y = \begin{cases} x^3 + 3ax^2 + b & x \geq 0 \\ -x^3 + 3ax^2 + b & x < 0 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 3x^2 + 6ax & x \geq 0 \\ -3x^2 + 6ax & x < 0 \end{cases}$$

$A(-1,1) \Rightarrow -(-1)^3 + 3a(-1)^2 + b = 1 \Rightarrow 1 + 3a + b = 1 \Rightarrow 3a + b = 1$

اکسترمم نسبی در تابع پیوسته

$x=-1$ و $y'=0 \Rightarrow -3(-1)^2 + 6a(-1) = 0 \Rightarrow -3 - 6a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

---

۷)

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم و مجانب افقی $y = \frac{a}{c}$ است. پس در تابع $y = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$

مجانب‌ها: $x = -\frac{a-1}{a+1}$ و $y = \frac{a}{a+1}$ هستند پس نقطه $A\left(\frac{1-a}{a+1}, \frac{a}{a+1}\right)$ مینیمم تابع $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است.

از طرفی می‌دانیم مینیمم سهمی $(x = -\frac{b}{2a})$ است پس $A\left(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3})\right)$ است. $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

$\frac{1-a}{a+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3a - 3 = a + 1 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a=2}$ $\left(\frac{a}{a+1} = \frac{2}{3} \xrightarrow{a=2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \checkmark\right)$

---

۸)

مجانب افقی: $\lim_{x \to +\infty} \frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1} \underset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{bx^2}{4x^2} = \frac{b}{4} \rightarrow$ در صورت سوال گفته مجانب افقی $y=3$ است

$\frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$ (داریم)

مجانب قائم: $4x^2 + ax + 1$ ، $x = -\frac{1}{2}$ مجانب قائم $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج $\Rightarrow 4x^2 + ax + 1 = 4(x+\frac{1}{2})^2$

(حول ریشه مخرج که خاص ... حد نامتناهی می‌شود) $\Rightarrow 4x^2 + ax + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow a = 4$ $\left(\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{12x^2+7}{4(x+\frac{1}{2})^2} = +\infty\right)$

توجه کنید که چون صورت $12x^2+7$ نمی‌تواند ریشه داشته باشد تنها حالت ممکن برای قرار دادن $x=-\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج بود.

$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3}$

Date No

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8} \rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-x^4(3x^2)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$ 9

ریشه‌های f' : $x^3(x^3-32)=0 \rightarrow x=0$ ، $x^3-32=0 \Rightarrow x^3=32 \Rightarrow x=2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$

$x^3-8=0 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ از طرفی ۲ ریشه مخرج (تنها) تعریف نشده است

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\sqrt[3]{32})$	↗	$+\infty$

پس تابع در بازه‌های $[0,2)$ و $(2,2\sqrt[3]{4}]$ نزولی اکید است.

با طول‌های $2-0=2$ و $\boxed{2\sqrt[3]{4}-2}$ که دومی بزرگتر است

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3} \Rightarrow D_f: x^2-3\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 3 \Rightarrow x\neq \pm\sqrt{3} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$$ 10

$$\hookrightarrow f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2}$$

ریشه‌های f' : $2x^5-12x^3+6x=0 \rightarrow \boxed{x=0}$ ، $\rightarrow x^4-6x^2+3=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-6t+3=0$ ، $t=\frac{+6\pm\sqrt{6^2-4(1)(3)}}{2(1)}$

$\Rightarrow t=\frac{+6\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{+6\pm2\sqrt{6}}{2}=+3\pm\sqrt{6}=x^2 \rightarrow x^2=3-\sqrt{6} \rightarrow x=\pm\sqrt{3-\sqrt{6}} \rightarrow$ بین ۲ و ۲-

$x^2=3+\sqrt{6} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3+\sqrt{6}} \rightarrow$ خارج ۲ و ۲-

x	-2		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

پس تابع در بازه‌های $[-\sqrt{3-\sqrt{6}},0]$ و $[\sqrt{3-\sqrt{6}},2]$

اکیداً نزولی است ($\boxed{\text{دو بازه}}$)

Date   No

شماره ۲۶   شتیابی بهاران

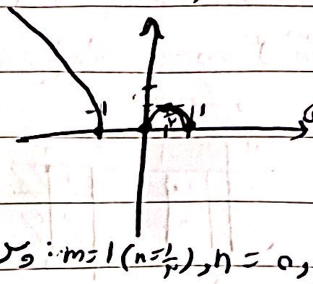
(۱)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2+x}\,; & 1\geq x\geq 0\\ \sqrt{x^2+x}\,; & x\leq -1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} & 1>x>0\\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}$$

ریشه: $x=\frac{1}{2}$

ریشه $x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	-1		0		$\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$			//////		$+$	0	$-$		//////
y	$+\infty \searrow$		0	//////	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	//////



توجه کنید که مشتق در حد راست ۰ و حد چپ ۱- و ۱ تعریف نشده و نامتناهی است!

$\boxed{1+m+n=\ldots}$ (از $\frac{1}{2}$ و ۰ و $x=-1$) $k=4$ و $n=0$ و $(x=\frac{1}{2})$ $m=1$: پس

ریشه $|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$x(1-|x|)\geq 0$

ریشه: $x=0$

-1	0	1
$+$ 0 $-$	0 $+$	0 $-$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$ } درست آوردن دامنه f:

---

(۲)

درست آوردن دامنه:

$I)\ x\geq 0$ و $II)\ a-2x\geq 0 \Rightarrow 2x\leq a \Rightarrow x\leq\frac{a}{2} \xrightarrow{a>0} \frac{a}{2}\geq x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,\frac{a}{2}]$ (ریشه های تابع

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{2\sqrt{a-2x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-2x}}=\dfrac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$

ریشه های مشتق $\rightarrow \sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x=4x \Rightarrow 6x=a \Rightarrow x=\frac{a}{6}$

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
y'	//////	$+$	0	$-$	//////
y	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{3a}{2}}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{a}{2}}$

درضمن در نقطه ۰ و $\frac{a}{2}$ چون تابع در دو طرف متفاوت نیست، مشتق ناپذیر است از طرفی تابع مشتق در حد راست ۰ و حد چپ $\frac{a}{2}$ نامتناهی است. جایگذاری $\frac{a}{6}$ $(\frac{a}{2},\frac{a}{6})$ برای تشخیص علامت مشتق لازم

بیشترین مقدار تابع: $\sqrt{\frac{3}{2}a}$ و کمترین مقدار تابع $\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\Rightarrow \sqrt{12}=\sqrt{\frac{3}{2}a}\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\rightarrow \frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \boxed{[a]=4}$

---

(۳)

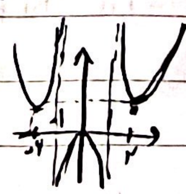
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\geq 2\\ -\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & -2<x<2\\ \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\leq -2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}+\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x>2\\ -\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & -2<x<2\\ +\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x<-2\end{cases}$$

(اگر $y=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow y'=\dfrac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}$

تابع در نقاط $x=\pm 1$ تعریف نشده و ناپیوسته است. همچنین تابع مشتق در نقاط $x=2$ و $x=-2$ تعریف نشده و f مشتق ناپذیر است.

همه ریشه های مشتق را پیدا کنیم و ریشه های ساده برای مشتق بررسی (قرینه شدن در ریشه های ساده) : $2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow 2x(\underbrace{x^4-2x^2+4}_{\Delta<0})=0 \Rightarrow \underline{x=0}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2	
y'		$-$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$\boxed{\text{اکسترمم نسبی}}$ در نقاط $x=-2$ و $x=0$ و $x=2$ داریم