Date No

۲۷

ثمینا بهرامی ۱۹٫۵

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ (حد وجود دارد) $\Rightarrow \frac00$ مبهم $\Rightarrow \lim_{x\to0^+}f(x)=0 \xrightarrow{\text{پیوسته}} f(0)=0 \Rightarrow \cos^3(0)+a(0)^2+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$ ۱

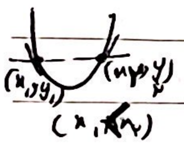
$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0 \Rightarrow f'_+(0)=0$; $\frac00 \Rightarrow f'_-(0)=0$ $\Big\} \Rightarrow f'(0)=0$ وجود دارد

$\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$, $f'(x)=-6\cos^2(2x)\sin 2x+2ax$ ۲

$\Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{-6\cos^2(2x)\sin(2x)+2ax}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-12x\cos^2(2x)+2ax}{x}=\lim -12\cos^2(2x)+2a=2$

$\Rightarrow 2a-12=2 \Rightarrow 2a=14 \Rightarrow \boxed{a=7} \Rightarrow \boxed{a+b=6}$ ✓

با توجه به حل سوال نقاطی از نمودار که عرض برابر و متساوی‌اند (روی سهمی) و شیب خط مماس بر آنها قرینه و معکوس یکدیگر (عمود) باشد ۲



$y_1=y_2 \Rightarrow x_1^2-1=x_2^2-1 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ → $x_1=x_2$ غ‌ق ; $x_1=-x_2$ ۲

$y'=2x \Rightarrow y'_1=-\frac{1}{y'_2} \Rightarrow 2x_1=-\frac{1}{2x_2} \Rightarrow 2x_1=\frac{1}{2x_1} \Rightarrow 4x_1^2=1$

$\Rightarrow x_1^2=\frac14 \Rightarrow x_1=\pm\frac12$ → $x_1=\frac12 \Rightarrow x_2=-\frac12$ غ‌ق ; $x_1=-\frac12,\ x_2=\frac12$ ✓ $\Rightarrow y_2=y_1=(\frac12)^2-1=\frac14-1=-\frac34$

$\boxed{y_1+y_2=2y_1=2(-\frac34)=-\frac32}$ ✓

خط d با شیب m داریم ۳

$m=\frac{6-(-12)}{2.5-(-0.5)}=\frac{18}{3}=6 \Rightarrow d: y=6x-9$ (نقطه $(-\frac12,-12)$)

مماس $\Rightarrow$ I) $y=f(x)$; II) $y'=f'(x) \Rightarrow m=f'(x) \Rightarrow 6=f'(x)$

$f'(x)=-\frac{2a}{(2x-1)^2}$ ۲

I) $6x-9=\frac{a}{2x-1} \Rightarrow a=3(2x-3)(2x-1)$

II) $6=-\frac{2a}{(2x-1)^2}$ $\Big\} \Rightarrow 6=\frac{-6(2x-3)(2x-1)}{(2x-1)^2} \Rightarrow -1=\frac{2x-3}{2x-1}$

$\Rightarrow 1-2x=2x-3 \Rightarrow 4=4x \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow a=3(2(1)-3)(2(1)-1)=-3 \Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2x-1} \Rightarrow \boxed{f(5)=-\frac39=-\frac13}$ ✓

$f(x)=\frac{x+a}{ax+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$, $g(x)=2x+b \Rightarrow g'(x)=2$ ۴

f و g در ۱ مماس $\Rightarrow$

I) $f(1), g(1)$ تعریف شده $\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$, $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac1a\} \Rightarrow -\frac1a\neq1 \Rightarrow a\neq-1$

II) $f(1)=g(1) \Rightarrow \frac{a+1}{a+1}=2+b \Rightarrow 1=2+b \Rightarrow b=-1$

III) $f'(1)=g'(1) \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2}=2 \Rightarrow 1-a^2=2(a^2+2a+1) \Rightarrow 3a^2+4a+1=0$ → $a=-1$ غ‌ق ; $a=-\frac13$ ✓

$\boxed{a+b=-\frac43}$ ✓

۲

dotnote

5

$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x$, $g(x)=\frac{3}{2}\sin x \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cos x$

$f(x)=g(x) \Rightarrow \sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x \Rightarrow \frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=1$, $x\in[0,\pi]$ $\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{4}=m$ شیب d $\quad A(\frac{\pi}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4})$

2

$m=f'(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow d:(y-\frac{3\sqrt{2}}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow =\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$

$\xrightarrow{y=0} -\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\pi\sqrt{2}}{16} \Rightarrow \frac{(\pi-12)\sqrt{2}}{16}=\frac{\sqrt{2}}{4}x \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi-12}{4}}$ ✓

6

می‌دانیم محل دو اکسترمم‌ها محل تغییر علامت مشتق هستند که در یک تابع درجه ۳ همان ریشه‌های مشتق هستند پس.

$f'(x)=6x^2-6x-12 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} 6x^2-6x-12=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2 , x=-1$

$f(2)=16-12-24+1=-19$, $f(-1)=-2-3+12+1=8$ $\quad A(2,-19), B(-1,8)$

2

$m_{AB}=\frac{8-(-19)}{-1-2}=\frac{27}{-3}=-9 \to f'(x)=m \Rightarrow 6x^2-6x-12=-9 \Rightarrow 6x^2-6x-3=0$

$\Rightarrow 2x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \to$ $\boxed{\text{دو نقطه}}$ ✓

---

7 $\quad$ 1.5 ✓

$y=kx^3+(k+1)x^2 \Rightarrow y'=3kx^2+2(k+1)x \Rightarrow y''=6kx+2(k+1)$

$y''=0 \Rightarrow 6kx=-2k-2 \Rightarrow x_{\text{عطف}}=\frac{-2k-2}{6k}=-\frac{k+1}{3k} \Rightarrow$ نقطه عطف ناحیه دوم

$x_{\text{عطف}}<0 \Rightarrow -\frac{k+1}{3k}<0 \Rightarrow k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ (I) بازه ۱

$y_{\text{عطف}}>0 \Rightarrow k(-\frac{k+1}{3k})^3+(k+1)\frac{(-k-1)^2}{(3k)^2}>0$

$\Rightarrow \frac{2}{27}\frac{(k+1)^3}{k^2}>0 \Rightarrow k\in(-\infty,-1)$ بازه ۲ $\xrightarrow{\text{اشتراک دو بازه}}$ $\boxed{k\in(-\infty,-1)}$

(II) $k>-1$ $\quad$ هیچ مقدار صحیح منفی $\quad (I)\cap(II) \to k>0$

~~روی منحنی $(-1,-4) \Rightarrow -4=-1+a-b-1 \Rightarrow a-b=-2 \Rightarrow b=a+2$~~ ~~منحنی را $f(x)$ در نظر بگیرید~~

~~$f'(x)=3x^2+2ax+b$, d مماس: $(y-(-4))=m(x-(-1)) \Rightarrow y=mx+(m-4)$~~

~~نقاط تماس: I) $f(x)=y$; II) $f'(x)=y' \Rightarrow 3$~~

8

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ خط مماس: $d: y=mx+m-4$ (از نقطه $(-1,-4)$ روی منحنی می‌گذرد)

$\underset{(-1,-4)}{\hookrightarrow} f(-1)=-4 \Rightarrow -1+a-b-1=-4 \Rightarrow b=a+2 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+(a+2)x-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+a+2$

اگر نقطه تماس خط و منحنی را (α,β) بنامیم:

$f'(\alpha)=m \Rightarrow 3\alpha^2+2a\alpha+a+2=m$

$d: \beta=m\alpha+m-4=3\alpha^3+(2a+3)\alpha^2+(3a+2)\alpha+a-2$

$f: \beta=\alpha^3+a\alpha^2+(a+2)\alpha-1$

$\Rightarrow 2\alpha^3+(2a+3)\alpha^2+(3a+2)\alpha+a-2=a\alpha^2+(a+2)\alpha-1$

2

Date No

$$3\alpha^3+(a+3)\alpha^2+2a\alpha+a-1=0 \longrightarrow 3x^3+(a+3)x^2+2ax+a-1=0$$ پس معادله برخورد تابع و خط مماس را می‌نویسیم

می‌دانیم خط و منحنی در دو نقطه برخورد دارند و یکی (-1) و دیگری آن که می‌خواهیم مماس است. برای مماس بودن باید معادله برخورد در آن

نقطه ریشه مکرر داشته باشد. برای یافتن ریشه دیگر ابتدا ریشه $x=-1$ را جدا می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+(a+3)x^2+2ax+a-1 & x+1 \\ \hline \ominus\ 3x^3+3x^2 & 3x^2+(a+1)x+a-1 \\ \quad (a+1)x^2+2ax & \\ \ominus\ (a+1)x^2+(a+1)x & \\ \quad (a-1)x+a-1 & \\ \ominus\ (a-1)x+a-1 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$(x+1)\underbrace{\left(3x^2+(a+1)x+(a-1)\right)}_{\text{ریشه مکرر} \Rightarrow \Delta=0}=0 \to (a+1)^2-12(a-1)=0 \Rightarrow (a-5)^2=0 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

$$\Rightarrow b=a+2=7 \to \boxed{\frac{a}{b}=\frac{5}{7}}$$

9

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\text{I)}\ f(0)=4 \Rightarrow \boxed{c=4} \quad \text{II)}\ f'(0)=0 \Rightarrow b=0 \to f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a) \begin{cases} x=0 & \text{ماکزیمم نسبی} \\ x=-\frac{2a}{3} & \end{cases}$$

یافتن اکسترمم های نسبی

2

$$\Rightarrow x=-\frac{2a}{3}\ \text{مینیمم نسبی} \Rightarrow f\left(-\frac{2a}{3}\right)=0 \Rightarrow \left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+4=0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27}+4=0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27}=-4$$

$$\Rightarrow a^3=-27 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow \boxed{x_{\substack{\text{min} \\ \text{نسبی}}}=-\frac{2a}{3}=2}$$

15

$$f'(x)=4x^3-12x \Rightarrow f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1) \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=1 \text{ یا } x=-1 \Rightarrow f(-1)=f(1)=5$$

$$C(-1,5),\ D(1,5)$$

$$\hookrightarrow f'(x)=4x(x^2-3) \longrightarrow$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-4	↗	5	↘	-4	↗	

$\to$ min نسبی

$$\Rightarrow A(-\sqrt{3},-4),\ B(\sqrt{3},-4)$$

2

منفرد است

$\boxed{\text{پس } AB \text{ و } CD \text{ افقی اند پس } AB \parallel CD}$.