Date   No

۳۷

شنیا بهرامی

۱

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ حد وجود دارد، صورت باید صفر شود $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow \lim_{x\to0^+} f(x)=0 \xrightarrow{\text{پیوسته}} f(0)=0 \Rightarrow \frac{\cos^3(0)}{1}+\frac{a(0)^2+b}{0}=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0 \Rightarrow f'_+(0)=0$ ، $f(0)=0$

$\frac{0}{0}$ $f'_-(0)=0$ $\Big\} \Rightarrow f'(0)=0$ وجود دارد و

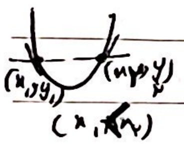
$\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$ ، $f'(x)=-6\cos^2(2x)\sin 2x+2ax$

$\Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{-6\cos^2(2x)\sin(2x)+2ax}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-12x\cos^2(2x)+2ax}{x}=\lim(-12\cos^2(2x)+2a)=2$

$\Rightarrow 2a-12=2 \Rightarrow 2a=14 \Rightarrow \boxed{a=7} \Rightarrow \boxed{a+b=6}$

۲

با توجه به حل تست دنبال نقاطی از تابع هستیم که عرض برابر و طول‌ها قرینه و شیب خط‌های مماس بر آنها قرینه و معکوس یکدیگر (عمود) باشند (روی سهمی)



$y_1=y_2 \Rightarrow x_1^2-1=x_2^2-1 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ → $x_1=x_2$ غ ق ق ، $x_1=-x_2$

$y'=2x \Rightarrow y'_1=-\frac{1}{y'_2} \Rightarrow 2x_1=-\frac{1}{2x_2} \Rightarrow 2x_1=\frac{1}{2x_1} \Rightarrow 4x_1^2=1$

$\Rightarrow x_1^2=\frac14 \Rightarrow x_1=\pm\frac12$ → $x_1=\frac12 \Rightarrow x_2=-\frac12$ غ ق ق ؛ $x_1=-\frac12,\ x_2=\frac12$ ✓ $\Rightarrow y_2=y_1=(\frac12)^2-1=\frac14-1=-\frac34$

$\boxed{y_1+y_2=2y_1=2(-\frac34)=-\frac32}$

۳

خط مماس d با شیب m داریم

$m=\frac{6-(-12)}{2.5-(-0.5)}=\frac{18}{3}=6 \Rightarrow d: y=6x-9$ (نقطه $(-\frac12,-12)$)

$f'(x)=-\frac{2a}{(2x-1)^2}$

مماس $\Rightarrow$ I) $y=f(x)$ ، II) $y'=f'(x) \Rightarrow m=f'(x) \Rightarrow 6=f'(x)$

I) $6x-9=\frac{a}{2x-1} \Rightarrow a=3(2x-3)(2x-1)$

II) $6=-\frac{2a}{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow 6=\frac{-6(2x-3)(2x-1)}{(2x-1)^2} \Rightarrow -1=\frac{2x-3}{2x-1} \Rightarrow 1-2x=2x-3 \Rightarrow 4=4x \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow a=3(2(1)-3)(2(1)-1)=-3 \Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2x-1} \Rightarrow \boxed{f(5)=-\frac{3}{9}=-\frac13}$

۴

$f(x)=\frac{x+a}{ax+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$ ، $g(x)=2x+b \Rightarrow g'(x)=2$

f و g در $x=1$ مماس $\Rightarrow$

I) $f(1), g(1)$ تعریف شده $\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac1a\} \Rightarrow -\frac1a\neq1 \Rightarrow a\neq-1$

II) $f(1)=g(1) \Rightarrow \frac{a+1}{a+1}=2+b \Rightarrow 1=2+b \Rightarrow b=-1$

III) $f'(1)=g'(1) \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2}=2 \Rightarrow 1-a^2=2(a^2+2a+1) \Rightarrow 3a^2+4a+1=0$ → $a=-1$ غ ق ق ؛ $a=-\frac13$ ✓

$\boxed{a\cdot b=\frac13}$

dotnote

۵

$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \,,\; g(x) = \frac{3}{2}\sin x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2}\cos x$

$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x \Rightarrow \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x\in[0,\pi]} \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{4} = m$ ، $A(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$ ، d

$m = f'(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow d: y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$

$\xrightarrow{y=0} -\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{16} \Rightarrow \frac{(\pi - 12)\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}x \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi - 12}{4}}$

۶

می‌دانیم محل ... اکسترمم‌ها محل تغییر علامت مشتق هستند که دیگر تابع درجه ۳ همان ریشه‌های مشتق می‌شود.

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$ یا $x = -1$

$f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19 \,,\; f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8 \quad A(2, -19),\; B(-1, 8)$

$m_{AB} = \frac{8 - (-19)}{-1 - 2} = \frac{27}{-3} = -9 \rightarrow f'(x) = m \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{دو نقطه}}$

۷

$y = kx^3 + (k+1)x^2 \Rightarrow y' = 3kx^2 + 2(k+1)x \Rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1)$

$y'' = 0 \Rightarrow 6kx = -2k - 2 \Rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{-2k-2}{6k} = -\frac{k+1}{3k} \Rightarrow$ ناحیه دوم $\begin{cases} x_{\text{عطف}} < 0 \Rightarrow -\frac{k+1}{3k} < 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ y_{\text{عطف}} > 0 \Rightarrow k(-\frac{k+1}{3k})^3 + \frac{(k+1)(-k-1)^2}{(3k)^2} > 0 \end{cases}$ بازه ۱

$\Rightarrow \frac{2}{27} \times \frac{(k+1)^3}{k^2} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -1)$ بازه ۲ $\xrightarrow{\text{اشتراک دو بازه}}$ $\boxed{k \in (-\infty, -1)}$

۸

~~$(-1, -4)$ روی منحنی $\Rightarrow -4 = -1 + a - b - 1 \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow b = a + 2$~~ ~~منحنی را $f(x)$ در نظر بگیرید~~

~~$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ، $d_{\text{خط مماس}}: (y - (-4)) = m(x - (-1)) \Rightarrow y = mx + (m - 4)$~~

~~شرط مماس $\begin{cases} \mathrm{I})\; f(x) = y \Rightarrow \\ \mathrm{II})\; f'(x) = y' \Rightarrow 3 \end{cases}$~~

۸

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ خط مماس: $d: y = mx + m - 4$ (چون نقطه $(-1, -4)$ روی خط است)

$\xrightarrow{(-1,-4)} f(-1) = -4 \Rightarrow -1 + a - b - 1 = -4 \Rightarrow b = a + 2 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + (a+2)x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 2$

اگر نقطه تماس خط و منحنی (α, β) باشد داریم:

$f'(\alpha) = m \Rightarrow 3\alpha^2 + 2a\alpha + a + 2 = m$

$\left.\begin{array}{l} d: \beta = m\alpha + m - 4 = 3\alpha^3 + (2a+3)\alpha^2 + (3a+2)\alpha + a - 2 \\ f: \beta = \alpha^3 + a\alpha^2 + (a+2)\alpha - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\alpha^3 + (2a+3)\alpha^2 + (3a+2)\alpha + a - 2 = a\alpha^2 + (a+2)\alpha ...$

Date   No

پس معادله برخورد دو منحنی را می‌نویسیم $2\alpha^3+(a+3)\alpha^2+2a\alpha+a-1=0 \longrightarrow 2x^3+(a+3)x^2+2ax+a-1=0$

می‌دانیم دو منحنی در دو نقطه برخورد دارند و یکی از آنها (۱-) و دیگری آن که می‌خواهیم مماس است. برای مماس بودن باید معادله برخورد دارای نقطه ریشه مکرر داشته باشد. برای یافتن ریشه دیگر ابتدا ریشه $x=-1$ را جدا می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+(a+3)x^2+2ax+a-1 & x+1 \\ \cline{2-2} \ominus\ 2x^3+2x^2 & 2x^2+(a+1)x+a-1 \\ \hline (a+1)x^2+2ax & \\ \ominus\ (a+1)x^2+(a+1)x & \\ \hline (a-1)x+a-1 & \\ \ominus\ (a-1)x+a-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(x+1)\underbrace{(2x^2+(a+1)x+(a-1))}_{\text{ریشه مکرر}\ \Rightarrow \Delta=0}=0 \Rightarrow (a+1)^2-8(a-1)=0 \Rightarrow (a-3)^2=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\Rightarrow b=a+2=5 \Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{5}}$

9

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$

I) $f(0)=4 \Rightarrow \boxed{c=4}$ II) $f'(0)=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$ $\left\{\begin{array}{ll} x=0 & \text{ماکزیمم نسبی} \\ x=-\dfrac{2a}{3} & \end{array}\right.$

یافتن اکسترمم های نسبی

$\Rightarrow x=-\dfrac{2a}{3}$ مینیمم نسبی $\Rightarrow f\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=0 \Rightarrow \left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^2+4=0 \Rightarrow \dfrac{4a^3}{27}+4=0 \Rightarrow \dfrac{4a^3}{27}=-4$

$\Rightarrow a^3=-27 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow \boxed{x_{\text{min نسبی}}=-\dfrac{2a}{3}=2}$

10

$f'(x)=4x^3-12x \Rightarrow f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1) \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=1$ و $x=-1 \Rightarrow f(-1)=f(1)=5$

$C(-1,5),\ D(1,5)$

$\hookrightarrow f'(x)=4x(x^2-3) \longrightarrow$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

-4 و -4: مینیمم نسبی

$\Rightarrow A(-\sqrt{3},-4),\ B(\sqrt{3},-4)$

$\boxed{\text{پس } AB \text{ و } CD \text{ افقی اند پس } AB \parallel CD}$.