نام و نام خانوادگی ..بردیا بابائیان.. ۱۸/۵ پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۲.۷.. کلاس ..حسابان مهر..

۱

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0 \longrightarrow b=0$$

$$f'(x)=3\times2\times\cos^2(2x)\times(-\sin 2x)+2ax \xrightarrow{x=0} f'(0)=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=2 \longrightarrow f''(0)=2$$

$$f''(x)=\dots(-\sin^2 x)\dots+2a \longrightarrow f''(0)=2=2a \longrightarrow a=1$$

$a+b=1+0=1$

(جواب پایین صفحه)

۰/۵

۲

$y=x^2-1$ و خط افقی که نمودار تابع را در نقاطی به طول α و $-\alpha$ قطع می‌کند.
و مماس‌های رسم شده بر هم عمودند.

$$f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-1 \longrightarrow (-2\alpha)(2\alpha)=-1$$

$$f(x)=x^2-1 \to f'(x)=2x \longrightarrow \alpha^2=\frac14 \longrightarrow \alpha=\pm\frac12$$

$$f(x)\xrightarrow{x=\pm\frac12}\frac14-1=-\frac34\times2=-\frac32$$

۲

۳

$$\text{معادله خط} \longrightarrow m=\frac{6-(-12)}{2/5-(-0/5)}=\frac{18}{3}=6 \longrightarrow y-6=6(x-2/5) \to y=6x-9$$

$$6x-9=\frac{a}{2x-1} \longrightarrow 12x^2-24x+9=a \longrightarrow 12x^2-24x+9-a=0 \xrightarrow{\Delta=0}$$

چون نقطه برخورد دارند.

$$(-24)^2-4(12)(9-a)=0 \longrightarrow 576-432+48a=0 \longrightarrow 48a=-144 \longrightarrow a=-3$$

$$f(5)=\frac{-3}{2\times5-1}=\frac{-3}{9}=-\frac13$$

۲

۴

خط $y=2x+b$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ بر تابع $y=\frac{x+a}{ax+1}$ مماس است، به طوری که شیب مشتق در $x=1$ برابر ۲ است.

$$y'=\frac{1\times(ax+1)-a(x+a)}{(ax+1)^2}=\frac{ax+1-ax-a^2}{(ax+1)^2}=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2},\quad y'(1)=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}=2 \to 2(a^2+2a+1)=1-a^2$$

$$\to 2a^2+4a+2-1+a^2=0 \to 3a^2+4a+1=0 \to (a+1)(3a+1)=0 \begin{cases} a=-1 \times \to \text{تابع ثابت می‌شود} \\ a=-\frac13 \checkmark \end{cases}$$

$$y=\frac{x-\frac13}{-\frac13x+1}=\frac{3x-1}{-x+3}\xrightarrow{x=1} y=\frac{3-1}{-1+3}=1$$

نقطه $A(1,1)$ روی خط هم قرار دارد $\to 1=2+b \to b=-1 \to a-b=-\frac13+1=\frac23$

۲

۵

$$f(x)=g(x) \to \sin x+\frac12\cos x=\frac32\sin x \to \frac12\sin x=\frac12\cos x \to \sin x=\cos x$$

$$\to x=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

نقطه مماس $\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\ \frac{3\sqrt2}{4}\end{matrix}\right.$

$$f'(x)=\cos x-\frac12\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}$$

$$d \to y-\frac{3\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\xrightarrow[y=0]{\text{محل برخورد با محور } x} -\frac{3\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-3=x-\frac{\pi}{4} \to x=-3+\frac{\pi}{4}$$

۲

$$f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0 \longrightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x}=0 \longrightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{1+b}{x}=0 \longrightarrow \boxed{b=-1}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2 \longrightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{-6\sin(2x)\cos^2(2x)+2ax}{x}=2 \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x\to0^-}\frac{-6\times2x+2ax}{x}=2$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{(2a-12)x}{x}=2 \longrightarrow 2a-12=2 \longrightarrow \boxed{a=7}$$

$a+b=6$

سؤال ۱!!

۶

برای پیدا کردن طول نقاط A و B مشتق f را برابر صفر قرار می‌دهیم

$f'(x)=6x^2-6x-12=0 \to x^2-x-2=0 \to x=-1 ,\ x=2$

جایگذاری در $f(x)$: $A(-1,8)$ ، $B(2,-19) \to m_{AB}=\frac{-19-8}{2-(-1)}=-9$ ← شیب خطی که از نقاط اکسترمم عبور می‌کند

نقاط مورد نظر باید دارای مشتق ۹- باشند تا شیب خط مماس برابر با موازی با پاره‌خط AB باشد.

$6x^2-6x-12=-9 \to 6x^2-6x-3=0 \xrightarrow{\Delta>0}$ ۲ جواب دارد

۲

۷

$y=kx^3+(k+1)x^2 \to y'=3kx^2+2(k+1)x \to y''=6kx+2k+2=0$

در ناحیه دوم $x<0$ ، $y>0$

$6kx=-2k-2$

$x=\frac{-(k+1)}{3k}<0 \to \frac{k+1}{3k}>0$ (۲)

$k\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^3+(k+1)\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^2>0$

$\frac{(k+1)^3}{-27k^2}+\frac{(k+1)^3}{9k^2}>0 \to \frac{-(k+1)^3+3(k+1)^3}{27k^2}>0$

$\to \frac{2(k+1)^3}{27k^2}>0$ (۱)

	-1		0	
$-$		$+$		$+$

(۲):

	-1		0	
$+$		$-$		$+$

(۱) ∩ (۲): $k\in(0,+\infty)$

به ازای همه مقدار صحیح و منفی.

۲

۸

خط مماس بر منحنی در نقطه عطف از منحنی عبور کرده

$y=x^3+ax^2+bx-1$

$y'=3x^2+2ax+b$

$y''=6x+2a=0 \to 6x=-2a \to x=\frac{-a}{3}$

نقطه عطف $A(-1,-4)$

$-\frac{a}{3}=-1 \to a=3$

$y=x^3+ax^2+bx-1 \xrightarrow[y=-4]{x=-1} -4=(-1)^3+3(-1)^2+b(-1)-1 \to -1+3-b-1=-4$

$b=5$

$\frac{a}{b}=\frac{3}{5}=0/6$

۲

۹

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \to f(0)=4=c$

$A(0,4)$ ماکسیمم نسبی است $\to f'(0)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b \to f'(0)=0=b$

$f(x)=x^3+ax^2+4 \to f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0 \begin{cases} x=0 \\ 3x+2a=0 \to x=\frac{-2a}{3} \end{cases}$ ← طول مینیمم نسبی ← مقدار تابع صفر است

طول نقطه مینیمم نسبی $=\frac{-2a}{3}=\frac{-2(-3)}{3}=2$

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=0 \to \left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+4=0 \to \frac{-8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0 \to a^3=-27$

$\to a=-3$

۲

۱۰

$f(x)=x^4-6x^2+a \to f'(x)=4x^3-12x=0 \to x=0 ,\ x=\pm\sqrt{3}$

$4x(x^2-3)$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	↘	-4	↗		↘	-4	↗

$A\begin{vmatrix}-\sqrt{3}\\-4\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}\sqrt{3}\\-4\end{vmatrix}$

$m=0$

$f''(x)=12x^2-12=0 \to x=\pm1 \to C\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ $D\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$

به زاویه صفر درجه

$m=0$

دو پاره‌خط با هم موازی اند چون شیب برابر دارند و ~~با هم~~ زاویه‌ای نمی‌سازند.

۲