نام و نام خانوادگی: حسام رقیع زاده

«به نام خدا»

مقطع: دوازدهم

شماره تکلیف: ۲۷

۱۹٫۷۵

-۱

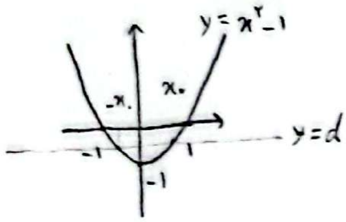
$f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b \quad , \quad f'(x) = -3\cos^2(2x) \times \sin(2x) \times 2 + 2ax$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \xrightarrow[\text{است } \frac{0}{0}]{\text{پس}} f(0) = 0 \to 1 + b = 0 \to b = -1$ ①

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2 \to \lim_{x\to 0^-} \frac{-3\cos^2(2x)\times\sin(2x)\times 2 + 2ax}{x} \underset{\text{هم ارزی}}{=} \lim \frac{-12x\cos^2(2x) + 2ax}{x} = 2 \to -12 + 2a = 2$

$\to 2a = -14 \to a = +7$ ② $\xrightarrow{①,②} a + b = +6$ ✓

۲



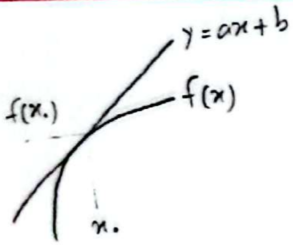
۱٫۷۵

$f(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{()'} f'(x) = 2x$

$f'(x_0) \times f'(-x_0) = -1 \to 2x_0 \times -2x_0 = -1 \to x_0^2 = 1/4 \to x_0 = \pm 1/2$

$f(x_0) = 3/4 \ , \ f(-x_0) = 3/4 \xrightarrow{+} \frac{3}{2}$

$f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} - 1 = -1.5$



خط مماس بر منحنی: $y = ax + b \to$ شیب $y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \to$ شیب $= 6$

$\to y = 6x - 9 \xrightarrow[x_0]{\text{جایگذاری}} y_{x_0} = 6x_0 - 9 \ , \ f(x_0) = \frac{a}{2x_0 - 1}$

$\xrightarrow{\equiv} 6x_0 - 9 = \frac{a}{2x_0 - 1} \to a = (6x_0 - 9)(2x_0 - 1)$ ①

$f'(x) = \frac{-2a}{(2x-1)^2} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) = y'_{x_0} \to \frac{-2a}{(2x_0 - 1)^2} = 6$ ②

$\xrightarrow{①,②} \frac{-2 \times (6x_0 - 9)(2x_0 - 1)}{(2x_0 - 1)(2x_0 - 1)} = 6 \to 6x_0 - 9 = -6x_0 + 3 \to 12x_0 = 12$

$\to x_0 = 1 \ , \ a = -3$

۲

$f(x) = \frac{-3}{2x - 1} \to f(5) = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$ ✓

Scanned with CamScanner

۴- اول از همه برای عبارت ها تابعی می سازیم:

$$f(x) = \frac{x+a}{ax+1} \quad , \quad g(x) = 2x+b$$

$$f(1)=g(1) \longrightarrow \frac{a+1}{a+1} = 2+b \rightarrow b=-1 \quad ①$$

۲

$$f'(x) = \frac{ax+1-a(x+a)}{(ax+1)^2} \quad , \quad g'(x)=2$$

$$f'(1)=g'(1) \longrightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \rightarrow 3a^2+4a+1=0 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=-\frac{1}{3} \quad ② \end{cases}$$

$a=-1$ (تابع به صورت تابع ثابت می‌شود) $= -1$ ⟶ برای این رسم مماس نمی‌شود ✗

✓

$$①,② \longrightarrow a-b = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}$$

۵-

$$f(x)=g(x) \rightarrow \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\cos x \rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{[0,\pi]} x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \rightarrow f'(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad , \quad f(x_0) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x+b \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4\times 4} + b \rightarrow b = \frac{12\sqrt{2}-\sqrt{2}\pi}{16} \;;\; y=0 \rightarrow x = \frac{-\sqrt{2}(12-\pi)}{4 \cdot 16} \times \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi-12}{4} \rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4} - 3$$

محل برخورد با محور x ها

۲ ✓

۶-

$$f(x) = 2x^3-3x^2-12x+1 \xrightarrow{(1)} f'(x) = 6x^2-6x-12 \rightarrow f'(x) = 6(x^2-x-2) \xrightarrow{f'(x)=0}$$

$$6(x-2)(x+1)=0 \quad \searrow 2 \quad \searrow -1$$

x		-1		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	8 max	↘	-19 min	↗

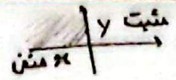
$$\max(-1,8) \quad \min(2,-19) \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{27}{-3} = -9$$

$$\xrightarrow[AB]{\text{موازی با}} f'(x) = -9 \rightarrow 6(x-2)(x+1) = -9 \rightarrow 2x^2-2x-1=0 \rightarrow \Delta>0 \rightarrow$$ دو ریشه دارد

۲ نقطه موازی هستند ✓

۲

۷-



$y = kx^3 + (k+1)x^2 \longrightarrow$ نقطه عطف تابع $: \dfrac{-b}{3a} = \dfrac{-(k+1)}{3k} < 0$ ①

در ناحیه دوم $y>0$ $\longrightarrow k \times \left(\dfrac{-(k+1)}{3k}\right)^3 + (k+1) \times \left(\dfrac{-(k+1)}{3k}\right)^2 > 0 \longrightarrow \underbrace{\left(-\dfrac{(k+1)}{3k}\right)^2}_{\text{همواره مثبت}} \left[\dfrac{-k^2-k}{3k} + k+1\right] > 0$ ②

①: $\dfrac{-(k+1)}{3k} < 0 \longrightarrow \dfrac{k+1}{3k} > 0$ $\begin{array}{ccccc} & -1 & & 0 & \\ + & | & - & | & + \end{array} \longrightarrow k: (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ④

②: $\dfrac{2k^2+2k}{3k} > 0 \longrightarrow \dfrac{2k(k+1)}{3k} > 0 \longrightarrow k+1 > 0 \longrightarrow k > -1$ ⑤ ; $k \neq 0$

④,⑤ $\xrightarrow{\cap}$ $k > 0$ $\longrightarrow$ به ازای هیچ مقدار k منفی

۲ ✓

۸-

- از صورت سوال به سختی متوجه می‌شویم که $(-1,-4)$ نقطه‌ی عطف تابع است!!

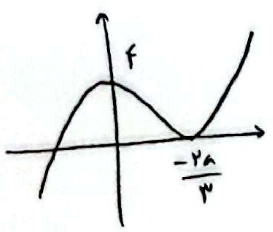
$y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ نقطه عطف $: \dfrac{-b}{3a} = \dfrac{-a}{3} = -1 \longrightarrow a = 3$

$y = x^3 + 3x^2 + bx - 1 \longrightarrow f(-1) = -4 \longrightarrow -1 + 3 - b - 1 = -4 \longrightarrow b = 5$

$\longrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}$

✓ ۲

۹-



$f(0) = 4 \longrightarrow c = 4$

$f'(0) = 0 \longrightarrow 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{x=0} b = 0$ $\longrightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + 4$

$\xrightarrow{(1)'} f'(x) = 3x^2 + 2ax \xrightarrow{f'(x)=0} x(3x + 2a) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-2a}{3} & \min \end{cases}$

$\longrightarrow f\left(\dfrac{-2a}{3}\right) = 0 \longrightarrow \dfrac{-8a^3}{27} + \dfrac{4a^3}{9} + 4 = 0$

$\longrightarrow \dfrac{4a^3}{27} = -4 \longrightarrow a^3 = -27 \longrightarrow a = -3$

۲

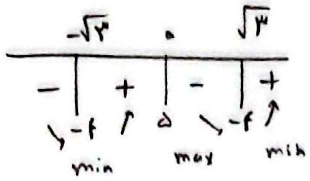
$x = \dfrac{-2a}{3} \; \min \longrightarrow \dfrac{-2 \times -3}{3} = 2$ ✓

طول min تابع

-۱۰

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 \xrightarrow{()'} \boxed{f'(x) = 4x^3 - 12x}$ ① $\xrightarrow{()'} \boxed{f''(x) = 12x^2 - 12}$ ②

①: $f'(x) = 0 \to 4x^3 - 12x = 0 \to 4x(x^2 - 3)$ → 0 , $\pm\sqrt{3}$

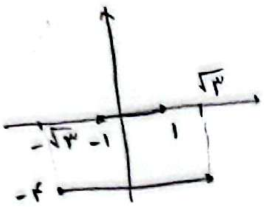


$A(\sqrt{3}, -4)$

$B(-\sqrt{3}, -4)$

②: $f''(x) = 0 \to 12(x^2 - 1) = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ نقاط عطف $\to$ $C(1, 0)$, $D(-1, 0)$

رسم $y = (x^2)^2 - 6x^2 + 5$



$\to$ دو خط موازی هستند $\to$ زاویه‌ی بین آنها $= 180$ یا 0

۲