نام و نام خانوادگی: حسام رفیع زاده

به نام خدا

مقطع: دوازدهم

شماره تکلیف: ۴۷

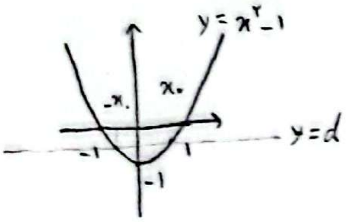
-۱

$$f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b \quad , \quad f'(x)=-3\cos^2(2x)\times\sin(2x)\times 2+2ax$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{بنابر}} f(0)=0 \rightarrow 1+b=0 \rightarrow \boxed{b=-1} \quad ①$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2 \rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{-3\cos^2(2x)\times\sin(2x)\times 2+2ax}{x} \underset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim \frac{-12x\cos^2(2x)+2ax}{x}=2 \rightarrow -12+2a=2$$

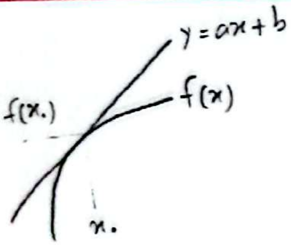
$$\rightarrow 2a=-14 \rightarrow \boxed{a=+7} \quad ② \qquad \xrightarrow{①,②} a+b=\boxed{+6}$$



$$f(x)=x^2-1 \xrightarrow{()'} f'(x)=2x$$

$$f'(x_0)\times f'(-x_0)=-1 \rightarrow 2x_0\times -2x_0=-1 \rightarrow x_0^2=\frac{1}{4} \rightarrow x_0=\pm\frac{1}{2}$$

$$f(x_0)=\frac{3}{4} \quad , \quad f(-x_0)=\frac{3}{4} \xrightarrow{+} \boxed{\frac{3}{2}}$$



خط مماس بر منحنی : $y=ax+b \rightarrow$ شیب $=\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow$ شیب $=6$

$$\rightarrow y=6x-9 \xrightarrow[x_0]{\text{جایگذاری}} y_{x_0}=6x_0-9 \quad , \quad f(x_0)=\frac{a}{2x_0-1}$$

$$\xrightarrow{\equiv} 6x_0-9=\frac{a}{2x_0-1} \rightarrow a=(6x_0-9)(2x_0-1) \quad ①$$

$$f'(x)=\frac{-2a}{(2x-1)^2} \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)=y'_{x_0} \rightarrow \frac{-2a}{(2x_0-1)^2}=6 \quad ②$$

$$\xrightarrow{①,②} \frac{-\cancel{2}\times(6x_0-9)\cancel{(2x_0-1)}}{\cancel{(2x_0-1)}(2x_0-1)}=\cancel{6}^{\,3} \rightarrow 6x_0-9=-6x_0+3 \rightarrow 12x_0=12$$

$$\rightarrow x_0=1 \quad , \quad a=-3$$

$$f(x)=\frac{-3}{2x-1} \rightarrow f(5)=\frac{-3}{9}=\boxed{\frac{-1}{3}}$$

۴-

- اول از همه برای عبارت ها تابعی می سازیم:

$$f(x) = \frac{x+a}{ax+1} \quad , \quad g(x) = 2x+b$$

$$\xrightarrow{f(1)=g(1)} \frac{a+1}{a+1} = 2+b \rightarrow \boxed{b=-1} \ ①$$

$$f'(x) = \frac{ax+1-a(x+a)}{(ax+1)^2} \quad , \quad g'(x) = 2$$

$$\xrightarrow{f'(1)=g'(1)} \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \rightarrow 3a^2+4a+1=0 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \xrightarrow[\text{تابع ثابت ما شود}]{\text{تابع به صورت}} = -1 \xrightarrow[\text{برای این رسم نمی شود}]{\text{مماس}} \times \\ \boxed{a=-\frac{1}{3}} \ ② \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①,②} \boxed{a-b = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}}$$

۵-

$$f(x)=g(x) \rightarrow \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\cos x \rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{[0,\pi]} x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \rightarrow f'(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad , \quad f(x_0) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + b \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\times\pi}{4\times4} + b \rightarrow b = \frac{12\sqrt{2}-\sqrt{2}\pi}{16} \ ; \ y=0 \rightarrow x = \frac{-\sqrt{2}(12-\pi)}{\cancel{4}\ 16} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi-12}{4} \rightarrow \boxed{x_0 = \frac{\pi}{4} - 3}$$

محل برخورد با محور xها

۶.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \xrightarrow{(1)} f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=} 6(x^2-x-2) \xrightarrow{f'(x)=0}$$

$$6(x-2)(x+1) = 0 \quad x=2 \ , \ x=-1$$

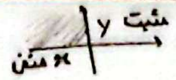
	-1		2	
$+$		$-$		$+$
↗	8 max	↘	-19 min	↗

$$\max(-1, 8) \quad \min(2, -19) \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{27}{-3} = \boxed{-9}$$

$$\xrightarrow[AB]{\text{موازی با}} f'(x) = -9 \rightarrow \cancel{6}^{2}(x-2)(x+1) = -\cancel{9}^{3} \rightarrow 2x^2-2x-1=0 \rightarrow \Delta>0 \rightarrow \text{دو ریشه دارد}$$

۲ نقطه موازی هستند

۷-



$y = kx^3 + (k+1)x^2 \xrightarrow{\text{نقطه‌ی عطف تابع}} : \frac{-b}{3a} = \frac{-(k+1)}{3k} < 0$ ①

در ناحیه‌ی دوم $y>0$ $\to k \times \left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^3 + (k+1)\times\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^2 > 0 \to \underbrace{\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^2}_{\text{همواره مثبت}}\left[\frac{-k^2-k}{3k} + k+1\right] > 0$ ②

①: $\frac{-(k+1)}{3k} < 0 \to \frac{k+1}{3k} > 0$ $\quad \begin{array}{c|c|c} & -1 & 0 \\ + & - & + \end{array}$ $\to k: (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ ⑤

②: $\frac{2k^2+2k}{3k} > 0 \to \frac{2k(k+1)}{3k} > 0 \to k+1>0 \to k>-1 \,;\, k\neq 0$ ⓪

⑤, ⓪ $\xrightarrow{\cap}$ $\boxed{k>0}$ $\to$ به ازای هیچ مقدار k ممکن نیست

۸-

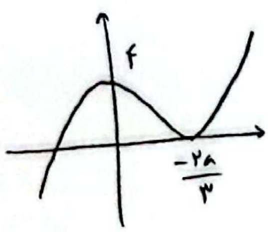
- از صورت سوال به سختی متوجه می‌شویم که $(-1,-4)$ نقطه‌ی عطف تابع است!!

$y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ $\quad$ نقطه عطف $: \frac{-b}{3a} = \frac{-a}{3} = -1 \to \boxed{a=3}$

$y = x^3 + 3x^2 + bx - 1 \to f(-1) = -4 \to -1 + 3 - b - 1 = -4 \to \boxed{b=5}$

$\to \frac{a}{b} = \boxed{\frac{3}{5}}$

۹-



$f(0) = 4 \to \boxed{c=4}$

$f'(0) = 0 \to 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{x=0} \boxed{b=0}$

$\to f(x) = x^3 + ax^2 + 4$

$\xrightarrow{()'} f'(x) = 3x^2 + 2ax \xrightarrow{f'(x)=0} x(3x+2a) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{-2a}{3} & \min \end{cases}$

$\to f\left(\frac{-2a}{3}\right) = 0 \to \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0$

$\to \frac{4a^3}{27} = -4 \to a^3 = -27 \to \boxed{a=-3}$

$x = \frac{-2a}{3}$ min $\to \frac{-2\times -3}{3} = \boxed{2}$
طول min تابع

۱۰-

$$f(x)=x^4-6x^2+5 \xrightarrow{()'} \boxed{f'(x)=4x^3-12x} \xrightarrow{()'} \boxed{f''(x)=12x^2-12}$$

① ②

①: $f'(x)=0 \rightarrow 4x^3-12x=0 \rightarrow 4x(x^2-3)$, $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$

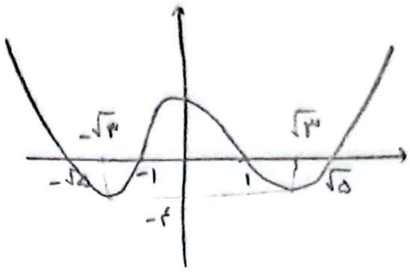
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$
		min		max		min	

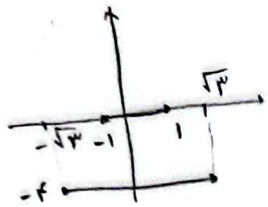
$A(\sqrt{3},-4)$

$B(-\sqrt{3},-4)$

② $f''(x)=0 \rightarrow 12(x^2-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ نقاط عطف $\rightarrow$ $C(1,0)$, $D(-1,0)$

رسم $y=(x^2)^2-6x^2+5$





$\rightarrow$ دو خط موازی هستند $\rightarrow$ زاویه ی بین آنها $= \boxed{180 \text{ یا } 0}$