

۱- تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ اور نظر کیجیو:

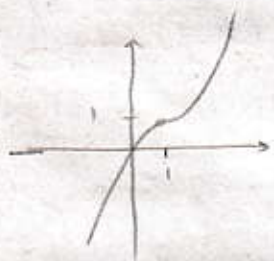
الف) نقاط بحرانی آن استعصن کنیو (ب) نمودار آن رسم کنیو

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$D_f = \mathbb{R}$



x	1
y'	0
y	3

(۲)

الف) $y = \frac{-x^3 + 4}{x^2}$

۲- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید

$$y = \frac{-x^3 + 4}{x^2} \rightarrow y' = \frac{-3x^2(x^2) - 2x(-x^3 + 4)}{x^4} = \frac{-x^4 - 8x}{x^4}$$

$$-x^4 - 8x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}, x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

نقطہ $x = -2$ بحرانی است اما $x = 0$ میں متعلق ہر دو تابع میں بحرانی نہیں!

(۲)

ب) $\frac{x^3}{x^2 - 1}$

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x(x^3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$x^4 - 3x^2 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}, x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

نقطہ $x = 0, \pm \sqrt{3}$ بحرانی اندر دی $x = \pm 1$ جزو تابع میں بحرانی نہیں!

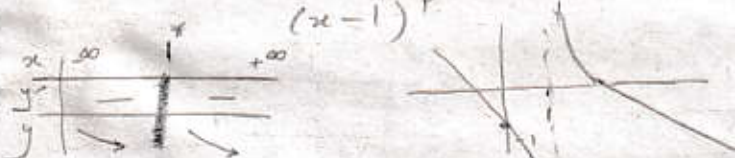
پرهام شریعی

۳- ملل نقاط اکسترم و نوع آنها در توابع زیر مشخص کنید.

الف) $y = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x-1}$

$y' = \frac{(-2x+2)(x-1) - (-x^2+2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} x-1=0 \rightarrow x=1^* \\ -x^2+2x-4=0 \Delta < 0 \end{array} \right.$

در نقطه $x=1$ عمود منتهی اکسترم ندارد ✓

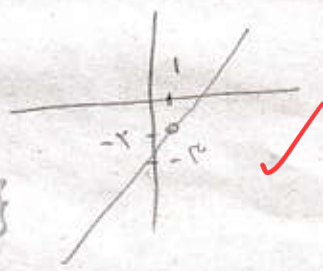


ب) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$

$\frac{(x-2)(x-1) + x-3}{x-1} = \frac{x-3}{x-1}$ $x \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

اکسترم ندارد!



۲

۴- تابع $y = \frac{2x-3}{x-1}$ را در نظر بگیرید.

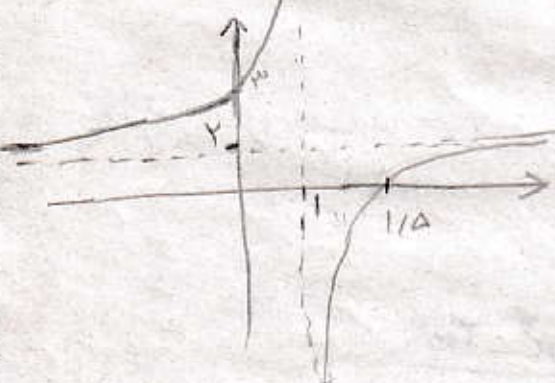
الف) مماسها را مشخص کنید

ب) به کمک رسم شکل مشخص کنید از کدام نواحی میگذرد

مماسها: $x=1$
 $y=2$

از ناحیه سوم میگذرد

۱

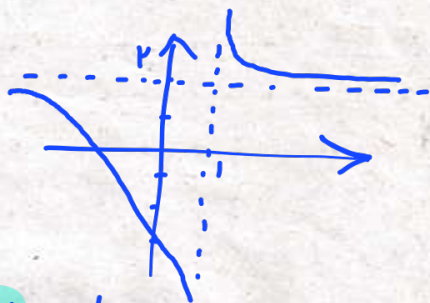


ب) $y' = \frac{-2-3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2} < 0$ ← تابعی است که نزولی است

if $x=0 \rightarrow y=-3$

if $y=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

از تمام نواحی میگذرد



۵ - نقطه (۲, ۳) مرکز تقاطع $y = \frac{ax+4}{x-b}$ است

الف) a و b را بیابید ب) ضرایب معکوس تابع را بیابید

$x-b=0 \rightarrow x=b$ بنا بر نام
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+4}{x-b} = a \rightarrow y=a$ بنا بر اصفی
 مرکز تقاطع $\left| \begin{array}{l} b=2 \\ a=3 \end{array} \right.$
 $y = \frac{3x+4}{x-2}$

$y^{-1} = \frac{2x+4}{x-3}$ ✓

(۲)

۶ - معادله محورهای تقاطع $y = \frac{3x+1}{x-2}$ را بیابید

$x-2=0 \rightarrow x=2$ بنا بر نام
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x-2} = 3 \rightarrow y=3$ بنا بر اصفی

$\left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right.$ مرکز تقاطع

$y - y_0 = \pm 1(x - x_0)$

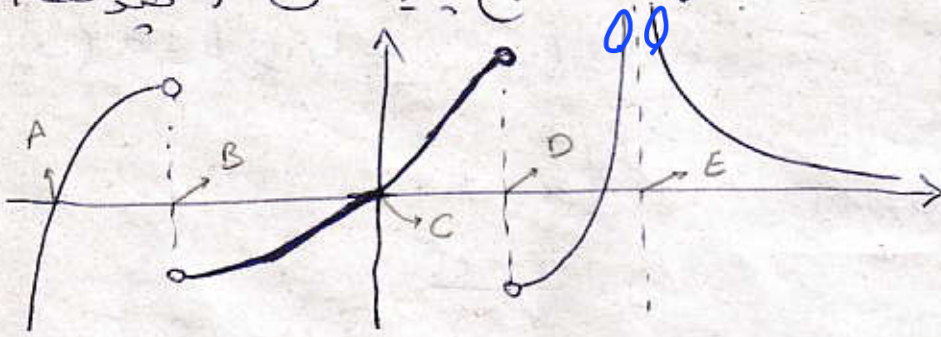
$y - 3 = \pm (x - 2)$ (۲)

$y = x + 1$ $y = -x + 5$ ✓

پرهام شریعی

۷- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، تابع معکوس f چند نقطه

بجرائی دارد؟



۴ نقطه
بجرائی

۱۷۵

$$y = |x^2 - ax + 2|$$

۸- عدد a چه باشد تا نمودار تابع

دارای ۳ نقطه ی بجرائی باشد؟

نمودار تابع یکسره درجه ۲ یا ربعانه روی بالاست و برای اینکه ۳ نقطه بجرائی داشته باشد باید سهمی از سه دانسه باشد که متدرجاً متعلق است

$$\Delta = a^2 - 4(1)(2) > 0 \rightarrow a^2 > 8 \rightarrow a > 2\sqrt{2} \text{ or } a < -2\sqrt{2}$$

۲

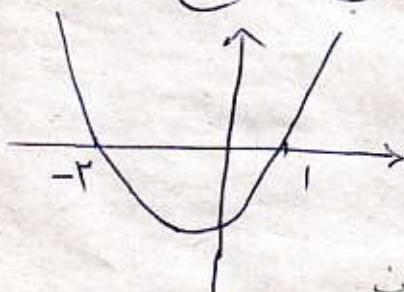
برهان شریقی

۹- حاصل ضرب تقادیر مکسیم و مینیم تابع $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 2}$

$y_{min} \times y_{max} = \frac{\Delta}{\Delta}$ (۲)

$y_{min} \times y_{max} = \frac{0 - 4(2)(1)}{1^2 - 4(2)(1)} = \frac{-8}{1-8} = \frac{8}{7}$ ✓

۱۰- اگر نمودار $y = x^2 + ax + b$ به شکل مقابل باشد، اختلاف طول های مکسیم شی تابع $y = (x^2 + ax + b)^2$ و مینیم شی تابع $y = (x^2 + ax + b)^3$



$y = k(x+2)(x-1) \xrightarrow{k=1} y = x^2 + x - 2$
 $\alpha = 1, b = -2$

الف) $y = (x^2 + x - 2)^2 \rightarrow y' = 2(x^2 + x - 2)(2x + 1) = 0$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	∞	0	$\frac{1}{14}$	0	∞

لحظه ها: $x = -2, 1, -\frac{1}{2}$

$x_{max} = -\frac{1}{2}$ (۲)

ب) $y = (x^2 + x - 2)^3 \rightarrow y' = 3(x^2 + x - 2)^2(2x + 1) = 0$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	-	0	-	0	+
y	∞	0	$-\frac{27}{28}$	0	∞

لحظه ها: $x = -2, 1, -\frac{1}{2}$

$x_{min} = -\frac{1}{2}$

اختلاف طول ها $= -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 0$ ✓