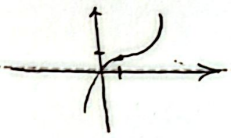
۲۵

ماهان ـ کفی

① الف) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow$ راس تابع = نقطه‌ی $(1,1)$ ✓ (۲)

ب)



② الف) $y = \frac{-x^3+4}{x^2} = \frac{-x^3}{x^2} + \frac{4}{x^2} = -x + \frac{4}{x^2} \rightarrow y' = -1 - \frac{4\times 2x}{x^4} = -1 - \frac{8x}{x^4} = -1 - \frac{8}{x^3}$

$\rightarrow \frac{-x^3-8}{x^3} = y' \rightarrow$ (-2 ، 0 ، 1) $\Rightarrow$ نقطه‌ی $(-2,-1)$ ✓

ب) $y = \frac{x^3}{x^2-1} \rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$ (۲)

$\Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$ ✓ $\Rightarrow$ نقاط بازگشتی: $(0,0)$ ، $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ ، $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

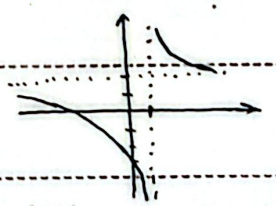
③ الف) $y = \frac{-x^2+3x+1}{x-1}$ (1 | 3 | 1 / 1 | -2 | -1) $\rightarrow y' = \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$ ✓ استوپ ندارد!

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1}$ (1 | -4 | 3 / 1 | -3 | 0) $\rightarrow y' = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} = x-3$ $(x \neq 1)$ (۲)

نقطه‌ی استوپ ندارد!

④ الف) $x = 1$: خط مجانب قائم ، $y = 2$: خط مجانب افقی (۲)

ب)



⑤ صفرهای مشتق در جدول، طول نقاط بحرانی تابع است

$x = 2 \rightarrow 2 - b = 0 \rightarrow b = 2$

$y = 3 \rightarrow a = 3$ (۲)

$y = \frac{3x+4}{x-2}$

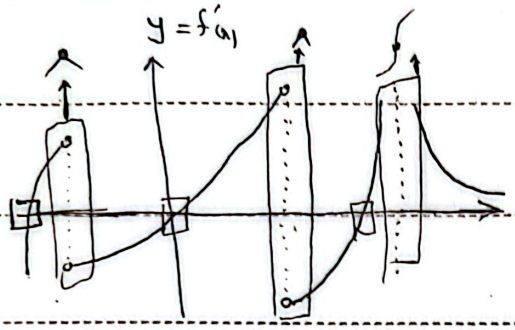
ب) $y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a} \Rightarrow y = \frac{3x+4}{x-2} \rightarrow y^{-1} = \frac{2x+4}{x-3}$ ✓

ماهان بخش

۶) طول و عرض نقاط روی محور تقارن از صفر تفاوت دارند (محل تقاطع با نیمساز ربع اول و سوم) و دارای قدر مطلق ۱ هستند

$x=2$: خط تقارن $\Rightarrow$ $y=3$: نیمساز ربع اول و سوم $\Rightarrow$ $S(2,3)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$ ✓ (۲)

۷) ۶ نقطه بحرانی ✓



(۲)

۸) تابع باید حتماً دارای ۲ ریشه با فاصله بیش از ۵ واحد از هم باشد

$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a^2 > 8 \Rightarrow \begin{cases} a > 2\sqrt{2} \\ a < -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ ✓ (۲)

۹) ابتدا حدت را تعیین علامت می‌کنیم:

$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2}$ → $\begin{matrix} + & 0 & - & 0 & + \\ & \sqrt{2} & & -\sqrt{2} & \end{matrix}$

$y_{max} = \frac{4}{4+\sqrt{2}+2} = \frac{4}{6-\sqrt{2}}$ $\quad y_{min} = \frac{4}{4+2\sqrt{2}+2} = \frac{4}{6+\sqrt{2}}$ (۲)

$y_{max} \cdot y_{min} = \frac{4}{6-\sqrt{2}} \times \frac{4}{6+\sqrt{2}} = \frac{16}{36-2} = \frac{16}{34} = \boxed{\frac{8}{17}}$ ✓

۱۰) ابتدا ضابطه سهمی را تعیین علامت می‌کنیم:

$y = (x+2)(x-1) = x^2+x-2 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

$y = (x^2+x-2)^2$ $\xrightarrow[\text{نیمساز}]{\text{تابع زوج}}$ $y' = 2(2x+1)(x^2+x-2) = 2(2x+1)(x+2)(x-1)$

$\begin{matrix} - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ & -2 & & -\frac{1}{2} & & 1 & \end{matrix}$ $\quad x_{max} = -\frac{1}{2}$ (۲)

$y = (x^2+x-2)^3 \rightarrow y' = 3(2x+1)(x^2+x-2)^2$

$\begin{matrix} - & 0 & + \\ & -\frac{1}{2} & \end{matrix}$ $\rightarrow x_{min} = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ اختلاف $= \frac{15}{4}$ ✓