۲ ب

A ۱۲ امیر

$y = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3$ ← نقاط بحرانی: تابع جزء تابع چندجمله‌ای مشتق‌پذیر است

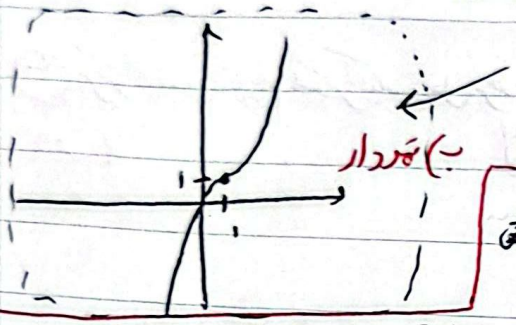
۱) الف) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ نقطه بحرانی

$y' = 3(x-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	مینیمم	↗	$+\infty$

ب) نمودار



۲) نقاط بحرانی جاهایی هستند که مشتق تابع اصلی صفر و یا مشتق وجود ندارد و یا محل تعریف نشدگی آن است.

الف) $y = \frac{-x^3+4}{x^2}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ حوزه پیوسته

$y' = \frac{(-3x^2)(x^2) - (2x)(-x^3+4)}{(x^2)^2} = \frac{-x^4 - 8x}{x^4}$

$\Rightarrow y' = \frac{-x(x-2)(x^2+2x+4)}{x^4}$ ($\Delta < 0$), $D_{y'} = \mathbb{R} - \{0\}$ و $x = 2$ و $x = 0$ غیرمجاز

نقاط بحرانی در چارچوب $\Rightarrow x = 2$ نقطه بحرانی

ب) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ حوزه پیوسته

$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - (2x)(x^3)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$

$D_{y'} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ و $x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$ ریشه‌های y' ⇒ نقاط بحرانی $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

(ع ت ق مضاعف)

۳) الف) $y = \frac{-x^2+4x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{(-2x+4)(x-1) - (1)(-x^2+4x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$ ($\Delta < 0$ صدت)

x	$-\infty$		1 (ن ت ق مضاعف)		$+\infty$
y'	−		∄	−	
y	$+\infty$ ↘		$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$

اکسترمم نسبی ندارد

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \Rightarrow y = x-3 ; x \neq 1$

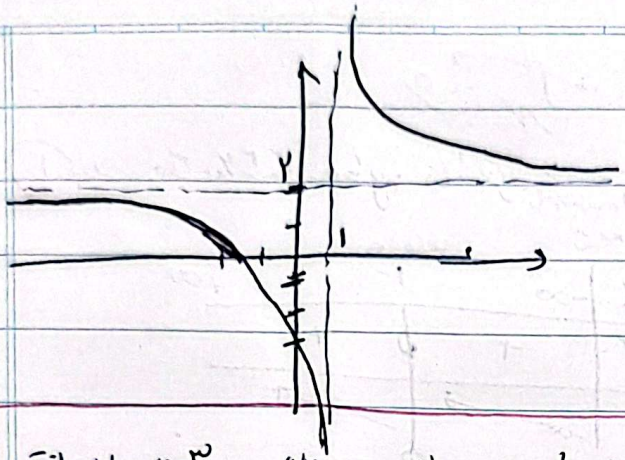
اکسترمم نسبی ندارد

۴) الف)

$\lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{5}{0^{\pm}} = \pm\infty$ ⇒ نامتناهی ⇒ مجانب قائم $x = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$ ("بالاترین توان صورت و مخرج") ⇒ $y = 2$ مجانب افقی

OLand



ب) نقطه $(-3, 0)$ روی تابع است لذا :

نقطه $(0, \frac{5}{2})$ نیز روی تابع است

پس، تابع از فرم توابع مختصاتی عبور می‌کند

۵) مرکز تقارن تابع هموگرافیک حل برخورد مجانب‌هاست ← $x=2$ مجانب قائم $y=3$ مجانب افقی

الف)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{an+1}{n-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{an}{n} = a \Rightarrow y=a \Rightarrow a=3$$

مجانب قائم

$x=2$ مجانب قائم ←

$$\lim_{x\to 2} \frac{3n+4}{n-b} \to \text{نامتناهی} \Rightarrow n=2 \Rightarrow b=2$$

عدد صفر ← $3(2)+4=10$

ریشه مخرج

ب)

$$y=\frac{3n+4}{n-2} \Rightarrow yn-2y=3n+4 \Rightarrow (y-3)n=2y+4 \Rightarrow n=\frac{2y+4}{y-3} \Rightarrow y^{-1}=\frac{2n+4}{n-3}$$

۶) $w(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقارن تابع هموگرافیک $\frac{ax+b}{cx+d}$ است.

$$w\left(-\frac{-2}{1}, \frac{3}{1}\right) \to w(2,3)$$

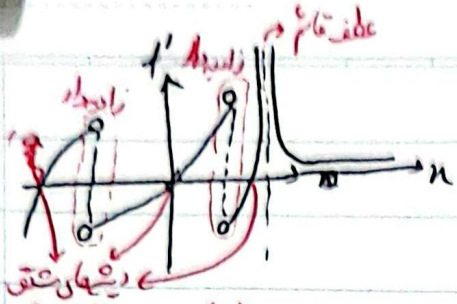
$$y' = \frac{-6-1}{(x-1)^2} = \frac{-7}{(x-1)^2}$$

محورهای تقارن نیمسازهای ناحیه‌ای هستند که از مرکز تقارن می‌گذرند

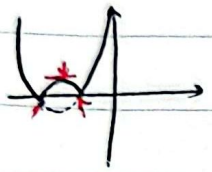
محورهای تقارن

$$\begin{cases} y-3=1(x-2) \Rightarrow y=x+1 \\ y-3=-1(x-2) \Rightarrow y=-x+5 \end{cases}$$

۷) ۶ نقطه بحرانی



۸) تابع قدر مطلق سه‌ضابطه‌ای تنها وقتی سه نقطه بحرانی دارد که دو ضابطه‌اش درجه دوم باشند (دو تا ریشه ناپذیری مشتق داشته باشد)



$\Delta > 0 \Rightarrow (-a)^2 - 4(1)(2) > 0 \Rightarrow a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a^2 > 8 \Rightarrow a$ یا $a < -2\sqrt{2}$ یا $a > 2\sqrt{2}$

$a \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

۹)

$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \Rightarrow y' = \frac{(2x)(x^2+x+2) - (2x+1)(x^2+2)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2}$ ریشه‌ها $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

x	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$
y'	+	−	+
y	↗ ماکزیمم نسبی	↘	↗ مینیمم نسبی

حاصل خواسته شده $= \frac{4}{4-\sqrt{2}} \times \frac{4}{4+\sqrt{2}} = \frac{16}{16-2} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

۱۰)

$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2+x-2$, $f'(x) = 2x+1$ $(\Rightarrow a=1, b=-2)$

$y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

حاصل ماکزیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$

$y = f^3(x) \Rightarrow y' = 3f^2(x)f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^2(2x+1)$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
		مضاعف				مضاعف	
y'	−	0	−	0	+	0	+
y	↘		↘		↗		↗

مینیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$

→ اختلاف = ۰

OLand