

سپه نعلی

۱۹,۵

برهان سرعین

فرض کنی: $f(x) = ax + b$
تابع خطی

برای تابع خطی $f(x) = ax + b$ داریم $f(2x+1) + f(x+2) = 3x$

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow f(3) + f(3) = 3 \rightarrow f(3) = \frac{3}{2} = 3a + b \\ x=0 &\rightarrow f(1) + f(2) = 3 \rightarrow a + b + 2a + b = 3 \rightarrow 3a + 2b = 3 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} b=0, a=1 \\ f(x)=x \end{cases}$$

$$y = \sqrt{f(x) - x^2} \xrightarrow{f(x)=x} y = \sqrt{x - x^2} \begin{cases} a < 0 < \max \\ x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \sqrt{-\infty, \frac{1}{4}} = [\frac{0}{4}, \frac{1}{4}] \\ y_s = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x+2}$ دامنه $\mathbb{R} - \{-2\}$ در $[0, \infty) - \{1\}$ حذر $f(\frac{a+b}{2})$
دامنه عبارت $x = -2$ می شود چون ریشه خارج است.

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x+2} = \frac{x(x+2)(x-2)}{x+2} = x(x-2) \neq 1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 \neq 0 \rightarrow (x-1)(x+2) \neq 0$$

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ if } x \neq \{-2, 2\} \rightarrow \begin{cases} a > 0 \min \\ x_s = -\frac{b}{2a} = 1 \\ y_s = 1 - 2 = -1 \end{cases} \rightarrow R_f = [-1, \infty) - \{1\}$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{-2+2}{2(-1)}) = f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$$

دامنه تابع خطی $y = \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx - 1}$ به صورت $[a, b]$ است. برد تابع؟

برای این تابع $y = \sqrt[3]{(x-2)^3} = x-2 = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ $\Rightarrow a = -4, b = 12, D_f = [-4, 12]$

فرض خطی در برابر

$$y = x - 2 \begin{cases} x = -4 \rightarrow \min y = -6 \\ x = 12 \rightarrow \max y = 10 \end{cases}$$

$$R_f = [-6, 10] \checkmark$$

و چون تابع اینها معکوس است ۲ سر دامنه برای ما ۲ سر برد را می سازد

اگر دامنه تابع $y = \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}}$ برابر تابع $y = \frac{ax^2-1}{x^2+b}$ برابر حاصل $a+b$

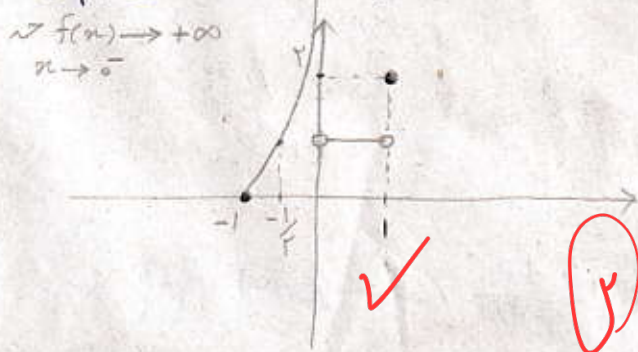
$$\frac{x+1}{1-x} \neq 0 \rightarrow \frac{-1}{-1+\frac{1}{x}} = D_f = [-1, 1)$$

$$\frac{ax^2-1}{x^2+b} \begin{cases} \xrightarrow{\max x^2 \rightarrow \infty} y \rightarrow a \\ \xrightarrow{\min x^2 = 0} y = -\frac{1}{b} \end{cases} R_{f_1} = \left[-\frac{1}{b}, a\right] = D_{f_1} = [-1, 1)$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

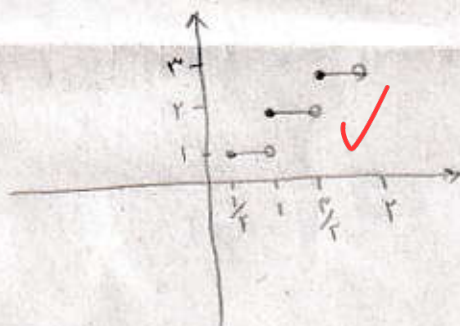
$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{x} - 1 & -1 < x < 0 \\ \text{تعریف نشده} & x=0 \\ \frac{0}{x} + \frac{x}{x} = 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$$

تابع $\frac{[x]}{x} + \frac{|x|}{x}$ در بازه $[-1, 1)$ رسم شود



نمود تابع $[x] + [x + \frac{1}{2}]$ در بازه $(\frac{1}{2}, 2)$ از چند پاره مستقیم شده؟ مقدار بارش

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < x < 1 &\rightarrow y = 0 + 1 = 1 \\ 1 < x < \frac{3}{2} &\rightarrow y = 1 + 1 = 2 \\ \frac{3}{2} < x < 2 &\rightarrow y = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$



اگر دامنه تابع $\left|\frac{x+1}{ax+3}\right|$ در بازه‌ای که از خط $y=1$ پایین تر است (b, ∞) باشد مقدار $a-b$

تابع درون قدر مطلق تابع هوموگرافیک با مماس افقی $\frac{1}{a}$ و با مماس عمودی $-\frac{3}{a}$ است. در این تابع، دامنه برابر $R - \left\{-\frac{3}{a}\right\}$ می باشد.

بر دایره هوموگرافیک نیز برابر $\left[\frac{1}{a}\right]$ است و

با توجه اینکه تابع درون قدر مطلق است برد تابع

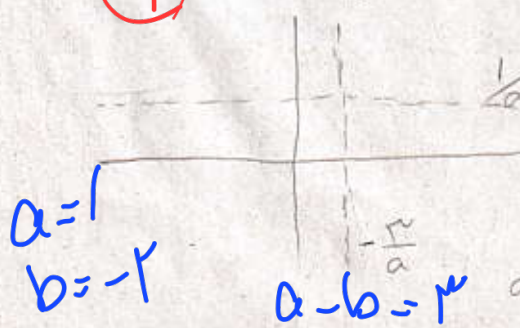
برابر $\left\{\frac{1}{a}\right\} - (\infty, \infty)$ می باشد بفرم حالت خاص که $a=0$

که در این حالت برد تابع برابر (∞, ∞) خواهد بود.

بنابراین اگر خط $y=1$ تابع را قطع کند دامنه تابع

در بازه‌ای که از $y=1$ پایین تر است برابر (b, ∞) خواهد بود مستقیم $y=1$

همان مماس افقی باشد. $a-b=4$ و $b=-2$ و $a=1$ و $-\frac{3}{a}=b$

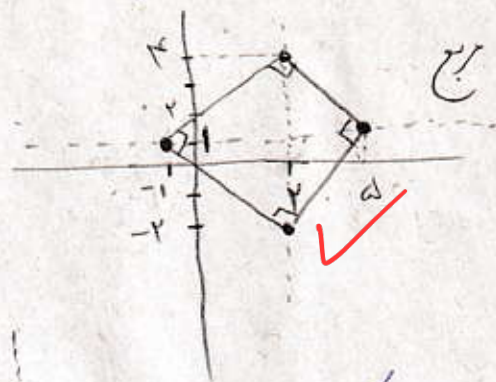


$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ a-b &= 3 \end{aligned}$$

مقدار بسته ط نه مقدار باز آن (b, ∞)

تابع $|x-2|+|y-1|=3$ را با ذکر ضابطه مدتی رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & x \geq 2, y \geq 1 \\ x-4 & x \geq 2, y < 1 \\ x+1 & x < 2, y \geq 1 \\ -x & x < 2, y < 1 \end{cases}$$

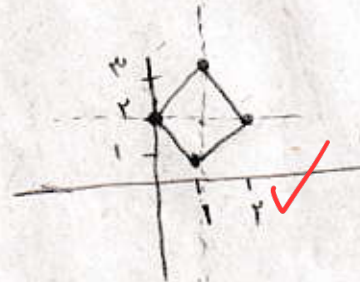


(۲)

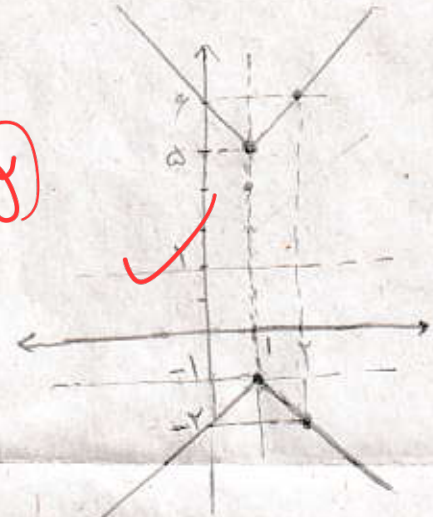
تابع زیر را با روشی دلخواه رسم کنید.

الف) $|x-1|+|y-2|=1$

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & x \geq 1, y \geq 2 \\ x & x \geq 1, y < 2 \\ x+1 & x < 1, y \geq 2 \\ 2-x & x < 1, y < 2 \end{cases}$$



(۲)



ب) $|x-1|-|y-2|=3 \rightarrow |y-2|-|x-1|=3$

$$\begin{cases} 4+x & x \geq 1, y \geq 2 \\ -x & x \geq 1, y < 2 \\ 4-x & x < 1, y \geq 2 \\ x-4 & x < 1, y < 2 \end{cases}$$

معادله a را طوری بیابید که بردار $y=3x+ax+b$ در $\mathbb{R}$ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+ax+b \rightarrow (3+a)x+b & x \geq -\frac{b}{a} \\ 3x-ax-b \rightarrow (3-a)x-b & x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

میشود تا این تابع با همواره $\mathbb{R}$ باشد باید هر دو ضابطه اکیداً صعودی شوند و چون تابع در هر دو حالت تابع خطی است پس باید شیب آن بزرگتر از صفر باشد.

$$\begin{cases} 3+a > 0 \rightarrow a > -3 \\ 3-a > 0 \rightarrow a < 3 \end{cases} \rightarrow a \in (-3, 3)$$

(۲)