

① چون دوسرے سوال ذکر شد کہ تابع f یک تابع خطی است بنابراین آن را به صورت $f(x) = ax + b$ می‌نویسیم:

$$f(x) = ax + b$$

$$a(x+1)+b+a(x+2)+b = 2x+3a+b$$

$$2ax+a+b+a(x+2)+b = 2ax+3a+2b = 2x+3a+b \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow y = \sqrt{f(x)} - x^2 \Rightarrow \sqrt{x-x^2} = y$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow y \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_y = \sqrt{(-\infty, \frac{1}{4}]} \Rightarrow \boxed{[0, \frac{1}{4}]}$$

$$f(x) = \frac{x(x^2-4)}{x+2} = \frac{x(x+2)(x-2)}{(x+2)} \quad x \neq -2 \rightarrow f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$$

②

$$\Rightarrow x \leq \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y \leq 1 - 2 = -1 \Rightarrow R = [-1, +\infty) \Rightarrow \underline{C} = -1$$

البته در صورت سوال ذکر شده بود دامنه شامل عدد ۸ نمی باشد در نتیجه ما هم خود را از دامنه حذف می‌کنیم زیرا این یک تابع سهمی شکل هست و در این حذف یک عدد ما هم در عددی نمی‌توانیم آن را بشماریم، بنابراین داریم:

$$y = f(x) \neq 8 \Rightarrow x^2 - 2x \neq 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \neq 0 \Rightarrow (x+2)(x-4) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

بنابراین ما a می‌تواند هر عددی از این خود را داشته باشد بنابراین:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$$

③ چون صورت مثال گفته تابع f خطی است پس ما هم از این فرجه ۳ عنوان بزرگترین تغییر آن می‌دهیم

$$y = \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx - 8} \Rightarrow \sqrt[3]{(x-2)^3} = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 12x - 8} = x - 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow [a, b] = [-4, 12]$$

از آنجایی که این یک تابع خطی است و می‌تواند به هر عددی تبدیل شود پس ما هم به هر عددی که می‌خواهیم تبدیل می‌کنیم

$$y = x - 2 \quad (x \in [-4, 12]) \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \Rightarrow y = -6 \\ x = 12 \Rightarrow y = 10 \end{cases} \Rightarrow R_f = [-6, 10]$$

④ مطابق با تعریف کتاب دوسر، عددی که بتواند هر عددی که می‌خواهیم به هر عددی تبدیل می‌کنیم به هر عددی که می‌خواهیم تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{-1} + \frac{1}{1} = 0 \Rightarrow x \in (-1, 1) \Rightarrow R_{y_2} = (-1, 1)$$

از آنجایی که تابع y_2 یک تابع است می‌توانیم از این در هر مقدار x در این تابع به هر عددی که می‌خواهیم تبدیل می‌کنیم

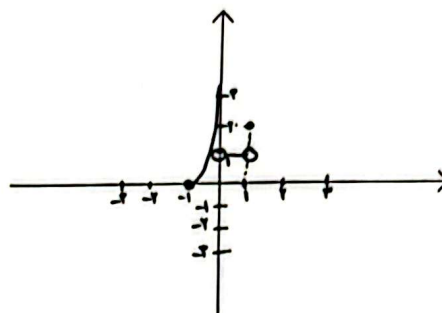
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2-1}{x^2+b} = a$$

است و این تابع به هر عددی که می‌خواهیم تبدیل می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2-1}{x^2+b} = \frac{-1}{b} \xrightarrow{\frac{b}{b}} \frac{-1}{b} = -1 \Rightarrow b = 1 \rightarrow a = 1 \Rightarrow \underline{a+b=2}$$

⑤ برای رسم این تابع لازم است تا آن را به سه بخش تقسیم کنیم:

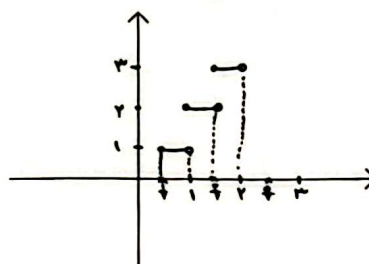
$$y = \frac{[x]}{x} + \frac{|x|}{x} \Rightarrow y = \begin{cases} 2 & ; x=1 \\ 1 & ; 1 < x < \infty \\ -\frac{1}{x}-1 & ; 0 < x < -1 \end{cases}$$



⑥ برای رسم این تابع آن را می‌توانیم به سه بخش تقسیم کنیم (در جدولی جدول تابع را در جدول زیر درج می‌کنیم)

$$y = [x] + [x + \frac{1}{x}] = 2[x]$$

$$y = \begin{cases} 2 & ; 2 < x < 3 \Rightarrow 2 < x < 1.5 \\ 1 & ; 1 < x < 2 \Rightarrow 1 < x < 0.5 \\ 0 & ; 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \end{cases}$$



از 3 بار خط تشکیل می‌دهد

$$\left| \frac{x+1}{ax+3} \right| < 1 \xrightarrow{\text{مربع کردن}} \frac{(x+1)^2}{(ax+3)^2} < 1 \Rightarrow (x+1)^2 < (ax+3)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 < a^2x^2 + 6ax + 9$$

$$\Rightarrow (a^2-1)x^2 + (6a-2)x + 8 > 0$$

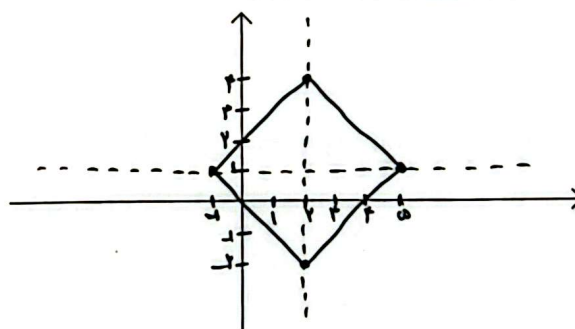
چون در صورتی که اعداد در سمت راست و چپ از علامت < یکدیگر را تغییر می‌دهند و در سمت چپ از علامت < یکدیگر را تغییر نمی‌دهند.

پس باید ضریب x^2 منفی شود در نتیجه داریم:

$$a^2 - 1 < 0 \Rightarrow a < \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow 6a-2=4 \\ a=-1 \Rightarrow 6a-2=-8 \end{cases} \Rightarrow 4x+8 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow b=-2$$

$$\Rightarrow a-b = 1 - (-2) = 3$$

$$\begin{cases} x-1+y-1 = x+y-2 = 3 & ; x > 2, y > 1 \\ \Rightarrow y = -x+5 & (x \in [2, 4]) \\ x-1+y-1 = x+y-2 = -3 & ; x < 2, y < 1 \\ \Rightarrow y = -x-1 & (x \in [-2, 0]) \\ x-1+y-1 = x+y-2 = 3 & ; x < 2, y > 1 \\ \Rightarrow y = -x+5 & (x \in [-2, 0]) \\ x-1+y-1 = x+y-2 = -3 & ; x > 2, y < 1 \\ \Rightarrow y = -x-1 & (x \in [2, 4]) \end{cases}$$

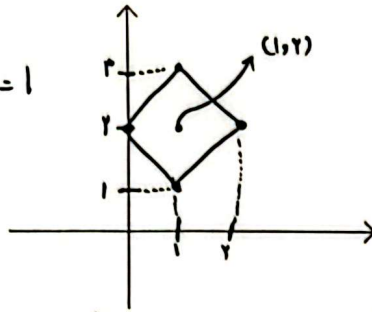


⑦

⑨

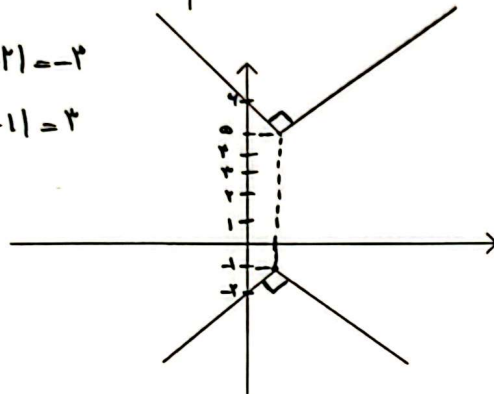
نقطه مربع با مرکز (۱، ۲) و به طول و عرض ۱ می باشد.

ا) $|x-1| + |y-2| = 1$



ب) $|x-1| - |y-2| = -3$

$\Rightarrow |y-2| - |x-1| = 3$



⑩ برای اینکه برد این تابع برابر ۱۸ داشته باشیم این تابع هم در ازای زمانی که درون قدرمطلق مثبت

و هم در ازای زمانی که درون قدرمطلق منفی مثبت هایی با علامت مثبتان داشته باشد. از طرفی چون که علامت بیرون قدرمطلق

است پس باید مثبت علامت مثبت داشته باشند! در نتیجه داریم:

$$y = \begin{cases} 3x + ax + b & ; x \geq -\frac{b}{a} \\ \Rightarrow x(3+a) + b \\ 3x - ax - b & ; x \leq -\frac{b}{a} \\ \Rightarrow x(3-a) - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3+a) > 0 \Rightarrow a > -3 \\ x(3-a) > 0 \Rightarrow 3 > a \end{cases} \xrightarrow{I \cap II} \boxed{-3 < a < 3}$$