پرهام شریعتی   بسمه تعالی

۱) اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-4,2]$ باشد دامنه تابع $f(\underbrace{3x-2}_{t})$ ؟

$D_{f(3x-2)} = [-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$

$-\frac{2}{3} \le x \le \frac{4}{3} \Leftarrow -4 \le 3x-2 \le 2 \leftarrow -4 \le x \le 2$

$-4 \le t \le 2$

اگر دامنه‌ی تابع $f(\underbrace{3x-2}_{t})$ بازه $[-4,-2]$ باشد دامنه تابع $f(\underbrace{x}_{t})$ ؟

$-4 \le x \le -2$

$D_{f(x)} = [-14,-8]$ $\quad -14 \le x \le -8 \xleftarrow{-14 \le t \le -8} -14 \le 3x-2 \le -8$

۲) نمودار تابع $x+\sqrt{x-2}$ را ۲ واحد به راست انتقال بعد نسبت به خط $x=y$ قرینه کرده تابع جدید نیمساز ناحیه اول را در نقطه با کدام عرض قطع می‌کند؟

تابع را معکوس می‌کنیم

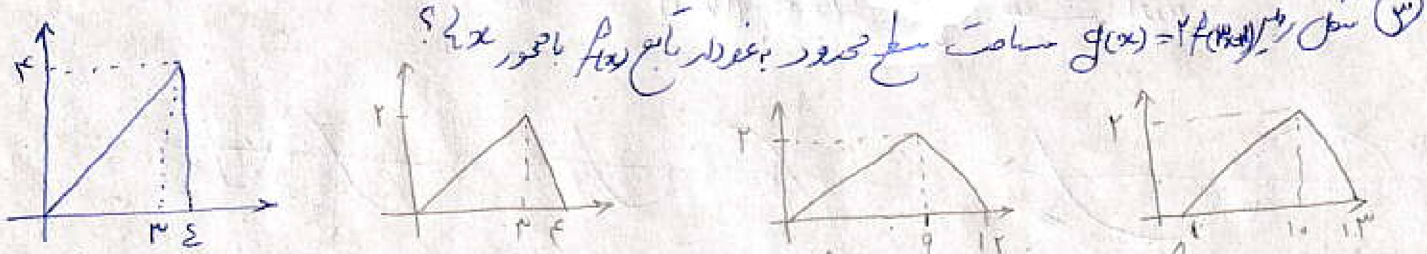
$x+\sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (x-2)+\sqrt{(x-2)-2} = (x-2)+\sqrt{x-4}$

چون تابع حاصل از جمع دو تابع اکیداً صعودی بوجود آمده پس این تابع معکوس خود را در نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند پس با معکوس کردن محل تقاطع با نیمساز ناحیه اول و سوم تفاوتی نمی‌کند

$(x-2)+\sqrt{x-4} = x \rightarrow \sqrt{x-4} = 2 \rightarrow x-4 = 4 \Rightarrow x = 8$

نمودار جدید نیمساز ناحیه اول و سوم را در نقطه $P(8,8)$ قطع می‌کند که عرض آن ۸ است.

۳) شکل زیر نمودار $g(x) = 2f(3x+1)$ مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x)$ با محور xها؟



$2f(3x+1) \longrightarrow f(3x+1) \longrightarrow f(x+1) \longrightarrow f(x)$

$S = \frac{2 \times 12}{2} = 12$

۴) نقطه $A(2,3)$ واقع بر نمودار $y=f(x)$ با نقطه A' واقع بر نمودار $y=a+2f\left(\frac{x-a}{2}\right)$ متناظر است. اگر خط $y=2x-8$ از نقطه A' عبور کند $a=$؟

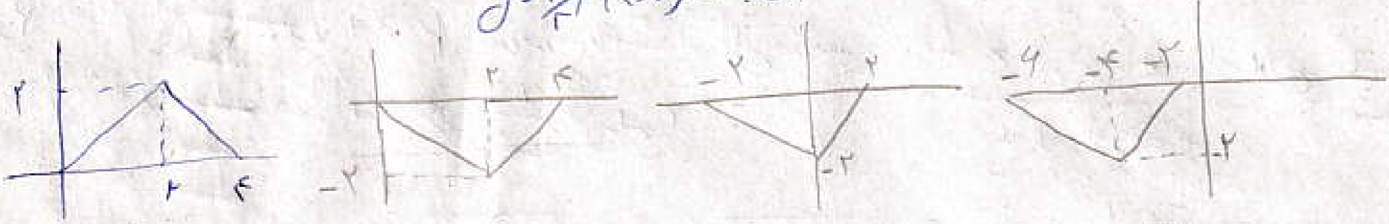
$$y=f(x)\xrightarrow{A(2,3)}3=f(2)$$

$$y=a+2f\left(\frac{x-a}{2}\right)\xrightarrow{y=2x-8}2x-8=a+2f\left(\frac{x-a}{2}\right)\rightarrow\frac{2x-8-a}{2}=f\left(\frac{x-a}{2}\right)$$

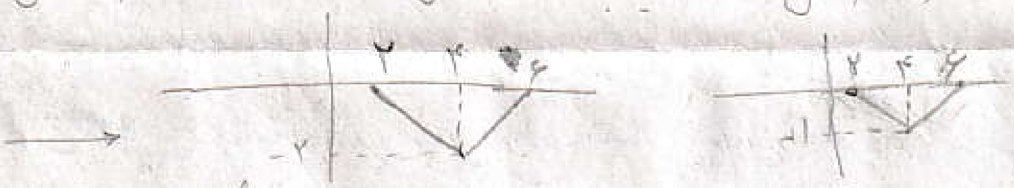
چون A و A' متناظرند:

$$\left.\begin{array}{l}2=\frac{x-a}{2}\rightarrow x-a=4\\ \frac{2x-8-a}{2}=3\rightarrow 2x-a=14\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}x=10\\ a=6\end{array}$$

۵) اگر نمودار $y=-f(x-2)$ به صورت مقابل باشد $y=\frac{1}{2}f(4-x)$

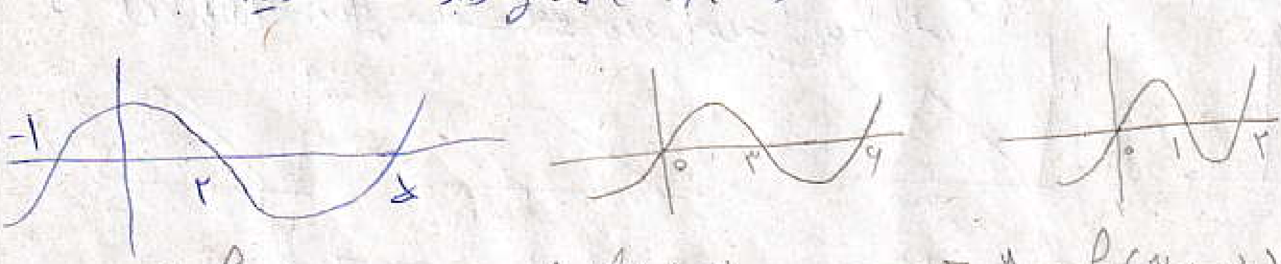


$$y=-f(x-2)\longrightarrow y=f(x-2)\longrightarrow y=f(x)\longrightarrow y=f(x+4)$$



$$y=f(-x+4)\longrightarrow y=\frac{1}{2}(4-x)$$

۶) اگر نمودار f به صورت مقابل دامنه‌ی $y=\sqrt{-(x+2)f(3x-1)}$ را بدست آورید

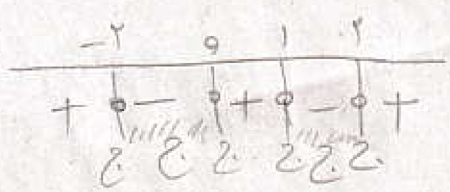


$$y=f(x)\longrightarrow y=f(x-1)\longrightarrow y=f(3x-1)$$

$$-(x+2)f(3x-1)\geq 0\longrightarrow(x+2)f(3x-1)\leq 0$$

ریشه: $x=-2$

ریشه: $x=0, 1, 2$



$$D_y=[-2,0]\cup[1,2]$$

(۷) نمودار $f(x)=|2x-3|+1$ را k واحد به سمت چپ سپس ۳ واحد به پایین تا نمودار g بدست آید

اگر محل برخورد روی محور y ها باشد مقدار k ؟ $k>0$

$$f(x)=|2x-3|+1 \xrightarrow{k\ \text{واحد به چپ}} |2(x+k)-3|+1 \xrightarrow[\text{۳ واحد پایین}]{} g(x)=|2x+2k-3|-2$$

$$|2x+2k-3|-2=|2x-3|+1 \xrightarrow[x=0]{\text{محل برخورد روی محور } y} |2k-3|-2=|-3|+1$$

$$\to |2k-3|=6 \begin{cases} 2k-3=6 \to k=4.5 & \text{ق ق} \\ 2k-3=-6 \to k=-1.5 & \text{غ ق ق } (k>0) \end{cases}$$

(۸) نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم سپس طول نقاط را ۳ برابر کرده‌ایم. چند واحد نمودار را به بالا منتقل کنیم تا با نمودار تابع f فقط یک نقطه مشترک داشته باشیم

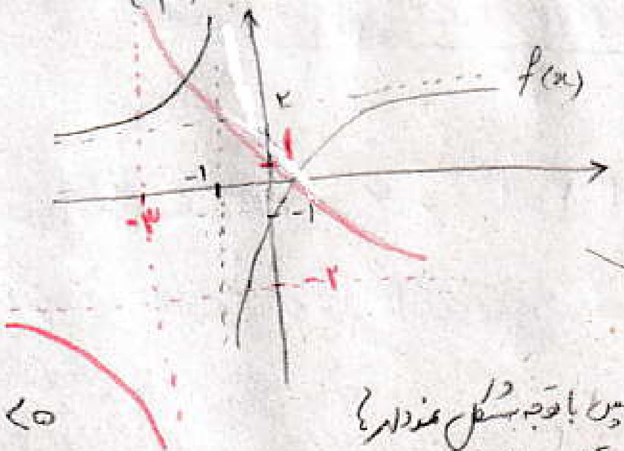
$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} -\frac{2x-1}{x+1} \xrightarrow{\text{طول ۳ برابر}} -\frac{2(\frac{x}{3})-1}{(\frac{x}{3})+1}$$

$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$: مجانب افقی $=\frac{a}{c}=2$ ، مجانب عمودی $=\frac{-d}{c}=-1$

$g(x)=\frac{\frac{2}{3}x-1}{\frac{x}{3}+1}$: مجانب افقی $=\frac{a}{c}=-2$ ، مجانب عمودی $=\frac{-d}{c}=-3$

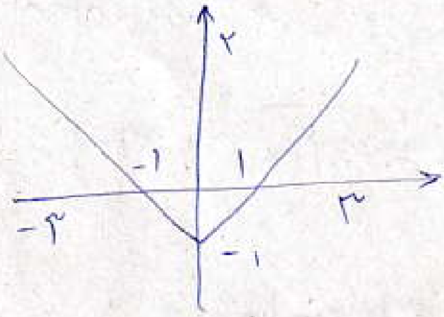
پارامتر تابع $g(x)$: $\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}<0$

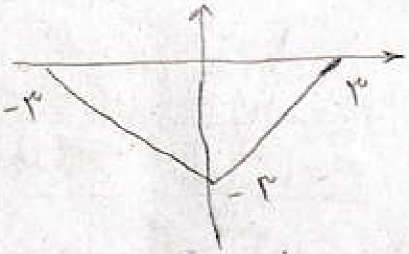
پارامتر تابع $f(x)$: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1>0$

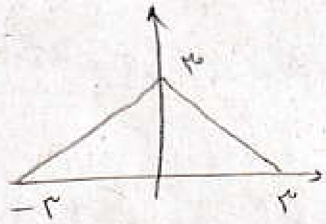


پس با توجه به شکل نمودارها باید تابع $g(x)$ را ۴ واحد به بالا ببریم (یعنی از مجانب افقی آن تا مجانب افقی $f(x)$) تا دو تابع تنها یک نقطه برخورد کنند

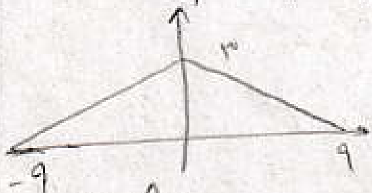
(9) اگر نمودار تابع $y_1=-f(\frac{x}{3})+2$ به صورت مقابل باشد، مساحت بین نمودار $y_2=f(x-1)$ و بالای خط $y=2$ کدام است؟

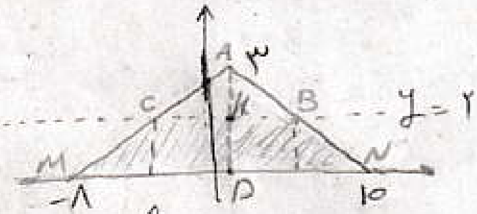






$y_1=-f(\frac{x}{3})+2 \longrightarrow y=-f(\frac{x}{3}) \longrightarrow y=f(\frac{x}{3})$





قضیه تالس : $\frac{AH}{AD}=\frac{BC}{MN}$

$\frac{1}{3}=\frac{BC}{18} \Rightarrow BC=6$

راه ۲

$y=f(x) \longrightarrow y_2=f(x-1)$

ضابطه تابع $f(x)$: تابع همان $y=|x|$ است که طول نقاطش ۳ برابر شده، نسبت به محور x ها قرینه شده و ۲ واحد انتقال عرضی به بالا پیدا کرده است.

$f(x)=-|\frac{1}{3}x|+3$

ضابطه تابع $f(x-1)$: $f(x-1)=-|\frac{1}{3}(x-1)|+3$

$f(x-1)=-|\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}|+3$

حال نقاط برخورد خط $y=2$ با نمودار $f(x-1)$

$-|\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}|+3=2 \longrightarrow |\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}|=1$

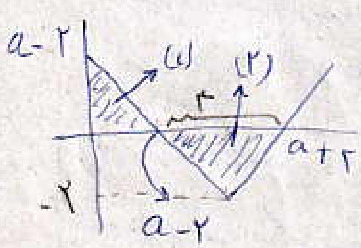
$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=1 \qquad \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=-1$

$x=4 \qquad x=-2$

$S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{2}=\frac{1\times 6}{2}=3$

فاصله این دو نقطه = قاعده مثلث $ABC = 6$ و $1=3-2=$ ارتفاع

(10) در شکل نمودار $f(x)=|x-a|-2$ رسم شده است. اگر مساحت قسمت رنگی $\frac{9}{2}$ باشد مقدار $f(\frac{1}{a})$؟ $a>0$



$S_{\text{رنگی}}=S_{(1)}+S_{(2)}=\frac{(a-2)^2}{2}+\frac{2\times 4}{2}=\frac{9}{2}$

$(a-2)^2=1 \begin{cases} a=3 & \text{ق ق} \\ a=1 & \text{غ ق ق} \end{cases} \longrightarrow f(x)=|x-3|-2$

چون نقطه $a-2$ در سمت چپ محور y ها باشد که با توجه به شکل اینگونه نیست!

$f(\frac{1}{a}) \xrightarrow{a=3} f(\frac{1}{3})=|\frac{1}{3}-3|-2=\frac{2}{3}$